


O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO RNO APLICADO À  
PROPAGAÇÃO TRANSIENTE TRIDIMENSIONAL DE ONDAS

Adolfo Ricardo Castro Bustamante

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Webe Joao Mansur  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Edison Castro Prates de Lima

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Luiz Eloy Vaz

CASTRO B. ADOLFO RICARDO

O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Propagação Transiente Tridimensional de Ondas (Rio de Janeiro), 1986.

ix , 122 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc. Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elementos de Contorno      2. Propagação de Ondas. I. COPPE/UFRJ. II. Título (Série).

À Myriam, minha esposa e a meus filhos  
Marcela Paz, Gabriela Andrea e  
Adolfo Alejandro.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Webe João Mansur pela amizade, cons  
tante orientação e estímulo.

Aos colegas, professores e funcionários da COPPE,  
Programa de Engenharia Civil, e em especial aos companheiros de  
sala de estudos pela sua amizade e apoio.

Ao Instituto Profissional de Valdivia, Chile.

À CAPES pelo auxílio financeiro concedido.

Resumo da Tese Apresentada À COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À  
PROPAGAÇÃO TRANSIENTE TRIDIMENSIONAL DE ONDAS

Adolfo Ricardo Castro Bustamante

Julho de 1986

Orientador: Webe João Mansur

Programa : Engenharia Civil

O método dos elementos de contorno é aplicado aos fenômenos de propagação de onda governados pela equação de onda que possam ser representados por uma função escalar ou potencial. A representação integral da equação de onda, (equação integral de Kirchhoff) é implementada para problemas tridimensionais e transientes através de um programa computacional em linguagem FORTRAN.

Estudou-se a influência nas soluções numéricas das diferentes aproximações ou funções de interpolação no tempo para as variáveis, e do valor do intervalo de tempo em relação à discretização ou malha de elementos de contorno.

Utilizou-se a formulação de elementos constantes e foram analisados quatro exemplos através do programa desenvolvido.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO  
TRIDIMENSIONAL TRANSIENT WAVE PROPAGATION

Adolfo Ricardo Castro Bustamante

July, 1986

Chairman : Webe João Mansur  
Department: Civil Engineering

The boundary element method was applied to study wave propagation phenomena represented by scalar functions (potential).

A FORTRAN computer code was developed to solve numerically the integral equation for three-dimensional scalar wave equation (Kirchhoff integral representation).

The influence in the numerical solution of employing different time interpolation functions for boundary variables, and analysis of the best choice of time intervals concerning a boundary discretization was studied.

Constant elements in space were employed and four numerical applications were carried out using the computer code developed.

## ÍNDICE

## CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO .....	1
------------------	---

## CAPÍTULO II

FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS .....	4
II.1 - INTRODUÇÃO .....	4
II.2 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS .....	4
II.3 - TIPOS DE ONDAS. CARACTERÍSTICAS GERAIS .....	5
II.4 - ONDAS ELÁSTICAS .....	8
II.5 - OUTROS TIPOS DE ONDAS .....	17

## CAPÍTULO III

EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO PARA PROBLEMAS TRANSIENTES GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO ESCALAR DE ONDA .....	20
III.1 - INTRODUÇÃO .....	20
III.2 - EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR TRANSIENTE .....	21
III.3 - FUNÇÃO DELTA DE DIRAC .....	21
III.4 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL TRIDIMENSIONAL .....	22
III.5 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE KIRCHHOFF .....	24

## CAPÍTULO IV

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS TRANSIENTES GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR .....	34
IV.1 - INTRODUÇÃO .....	34
IV.2 - DISCRETIZAÇÃO .....	35
IV.3 - DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA DE $\dot{u}$ .....	40
IV.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DISCRETIZADA .....	41
IV.5 - FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	44
IV.6 - SOLUÇÃO EM PONTOS INTERNOS .....	46

## CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS TRANSIENTES TRI-DIMENSIONAIS .....	47
V.1 - INTRODUÇÃO .....	47
V.2 - ELEMENTOS PARA DISCRETIZAR O CONTORNO .....	47
V.3 - DISCRETIZAÇÃO E AVANÇO NO TEMPO .....	48
V.4 - DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA .....	51
V.5 - EQUAÇÃO INTEGRAL DISCRETIZADA. COEFICIENTES ...	51
V.6 - COMBINAÇÃO DE APROXIMAÇÕES. COEFICIENTES .....	55
V.7 - VALORES ANALÍTICOS DE $G_1$ e $G_2$ .....	58
V.8 - CONSIDERAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS .....	62

## CAPÍTULO VI

DESCRIÇÃO GERAL DO PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	64
VI.1 - INTRODUÇÃO .....	64
VI.2 - DESCRIÇÃO GERAL .....	64
VI.3 - DESCRIÇÃO GERAL DAS ROTINAS .....	64
VI.4 - FLUXOGRAMA .....	68

## CAPÍTULO VII

EXEMPLOS NUMÉRICOS. ANÁLISE .....	72
VII.1 - INTRODUÇÃO .....	72
VII.2 - EXEMPLO I. FONTE CONCENTRADA EM UM ESPAÇO SEMI-INFINITO .....	72
VII.3 - EXEMPLO II. SCATTERING DE ONDAS PLANAS POR UM CILINDRO CIRCULAR .....	75
VII.4 - EXEMPLO III. PRESSÃO EM UM PONTO DENTRO DE UMA CAIXA RETANGULAR .....	82
VII.5 - EXEMPLO IV. CORPO SUBMETIDO A UMA FORÇA TIPO HEAVISIDE .....	86

## CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES .....	95
------------------	----



VIII.1 - CONCLUSÕES .....	95
BIBLIOGRAFIA .....	99
ANEXO A .....	103
ANEXO B .....	114
ANEXO C .....	117

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Para a explicação da verdadeira natureza da luz, foram desenvolvidas diferentes teorias. Na primeira metade do século XIX a luz era interpretada como a propagação de uma perturbação em um meio elástico ou éter. Assim foi possível explicar alguns fenômenos da reflexão e refração da luz, no entanto o fenômeno de difração, nome dado por Francisco Maria Grimaldi era inexplicado até que em 1818 Fresnel apresentou uma compreensiva teoria da difração na qual combinou as idéias de Huygens das ondas secundárias e as idéias das interferências de Young.

Para Fresnel, assim como para todos os cientistas do século XIX, a idéia de propagação implicava na existência de um meio transmissor ou éter (no caso da luz se denominou éter luminoso). Fresnel sugeriu que as ondas de luz eram ondas transversais neste éter sem ondas longitudinais, nesse tempo as ondas transversais elásticas nos sólidos não eram ainda conhecidas.

Teorias posteriores como a eletromagnética e quântica da luz substituíram a teoria da propagação em um éter, não obstante esta teoria estabelecida por Grimaldi, Young, Huygens. Fresnel, Kirchhoff e muitos outros serviu para explicar também diversos fenômenos que acontecem no campo da física e engenharia, assim por exemplo a concentração dinâmica de tensões em sólidos pode ser estudada como o resultado da difração de ondas elásticas quando passam através de discontinuidades geométricas [10], pois Poisson em 1829 reconheceu que uma perturbação elástica em geral está composta de ondas longitudinais e ondas transversais.

A equação integral estudada e implementada numericamente nesta tese é a equação integral de Kirchhoff, a qual foi utilizada e ainda serve na ótica para explicar alguns fenômenos de difração de ondas luminosas [3, 25].

Em problemas de propagação de ondas existe uma grande variedade de aplicações em engenharia, como propagação de tensões e deformações em sólidos, scattering de ondas acústicas, distribuição de corrente em linhas de transmissão, ondas de superfície em líquidos, etc., os quais estão matematicamente governados por equações diferenciais parciais ou equações de onda, cuja variável pode ser uma grandeza escalar ou vetorial.

Nesta tese aplica-se o método do elemento de contorno à equação de onda para problemas transientes com variável escalar, podendo então representar fenômenos por uma função de ponto ou potencial.

Demonstra-se como o método pode ser aplicado neste tipo de problema e com certas vantagens em relação a outros métodos de análise numérica, especialmente no que se refere à consideração de domínios infinitos, pois como sabemos neste caso o método das diferenças finitas ou o método dos elementos finitos requerem que se termine a malha do domínio, estabelecendo assim um contorno artificial o qual pode refletir ondas que interferirão nos resultados numéricos, podendo até invalidar a análise.

É estudado com a formulação de elementos constantes o comportamento das soluções numéricas quando são utilizadas diferentes funções de interpolação para aproximar as variáveis no contorno, e também é analisada a influência do valor

do intervalo de tempo no comportamento das soluções em relação a uma determinada malha.

No desenvolvimento da tese o capítulo II apresenta uma breve introdução da teoria básica de propagação de ondas, são vistas as ondas elásticas da elastodinâmica e são descritas as ondas acústicas e eletromagnéticas em forma concisa.

O capítulo III está dedicado à representação integral da equação de onda deduzida a partir da equação de onda escalar usando a solução fundamental tridimensional e o método dos resíduos ponderados.

No capítulo IV o método dos elementos de contorno é aplicado à equação integral de onda para no capítulo V se fazer a implementação numérica dela. No capítulo VI descreve-se brevemente o fluxograma da implementação computacional do programa do qual é listada a rotina mais relevante no Anexo A no final da tese. O capítulo VII contém quatro aplicações numéricas que servem para a análise dos diferentes resultados pelo uso das distintas funções de interpolação para as variáveis envolvidas, assim como da influência do intervalo de tempo para a marcha no tempo. Finalmente no capítulo VIII temos as conclusões relativas ao trabalho desenvolvido.

## CAPÍTULO II - FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Apresenta-se no presente capítulo algumas definições e conceitos associados aos problemas de propagação de ondas. Maior ênfase é dada ao caso de propagação de ondas em um meio elástico governadas pelas equações de elastodinâmica, descrevem-se também resumidamente o caso das ondas acústicas e eletromagnéticas.

### 2.2 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS

O processo pelo qual uma perturbação em um ponto do espaço se propaga até outro ponto sem nenhum transporte neto da matéria ou de material é o fenômeno físico de propagação de ondas.

Este fato acontece em um meio no qual a energia pode ser armazenada na forma de energia cinética e potencial.

Quando temos uma onda livre viajando, uma região do meio perturba a região vizinha, fornecendo-lhe energia. Esta região do meio por sua vez perturba outra zona vizinha causando um fluxo de energia em uma direção determinada. Esta energia vai sendo transformada de energia cinética em potencial e vice-versa de um ponto para outro na direção de propagação.

A velocidade de propagação da perturbação, ou simplesmente denominada velocidade de propagação está determinada pela constante do meio.

Movimentos ondulatórios ocorrem no vácuo (ondas eletromagnéticas), em gases (ondas de som), em líquidos (on-

das hidrodinâmicas) e em sólidos (ondas elásticas); as ondas eletromagnéticas podem atravessar gases, líquidos e sólidos.

### 2.3 - TIPOS DE ONDAS. CARACTERÍSTICAS GERAIS

As características ou parâmetros que definem uma onda são seu comprimento onda  $\lambda$ , sua velocidade de propagação  $C$ , sua frequência  $f$  e sua amplitude  $A$  (figura 2.3.1).

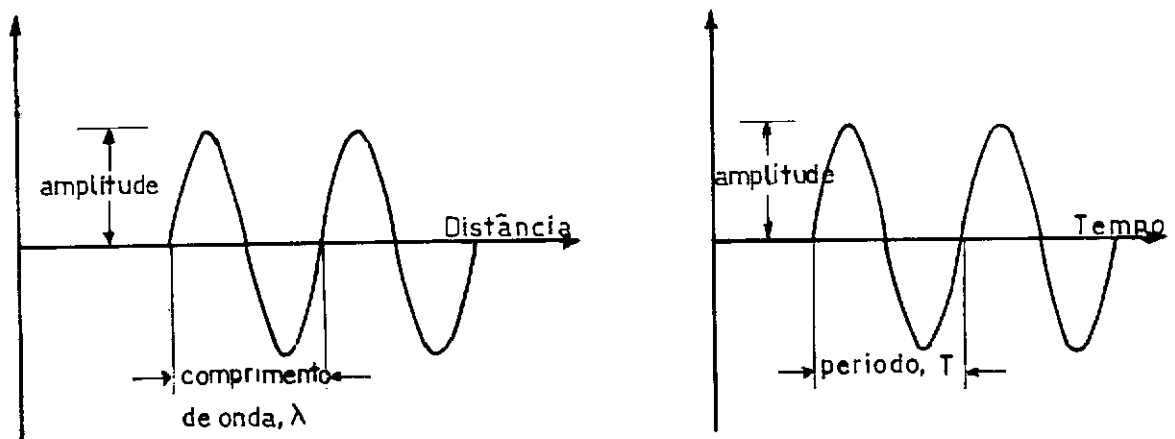


Figura 2.3.1 - Parâmetros Físicos de uma Onda

Os parâmetros cumprem as relações seguintes

$$C = f \cdot \lambda \quad (2.3.1)$$

$$T = 1/f$$

Sob o ponto de vista da forma de avanço da propagação temos o caso das ondas planas, onde todo ponto situado em um plano tem a mesma perturbação ou fase do movimento, sendo este plano perpendicular à direção do movimento. No caso das ondas denominadas esféricas, todos os pontos situados a igual distância de uma origem o ponto tem a mesma perturbação ou fase do movimento, estas ondas avançam radialmente no espaço, sua variação no tempo pode ser de forma qualquer (Figuras 2.3.2a e b).

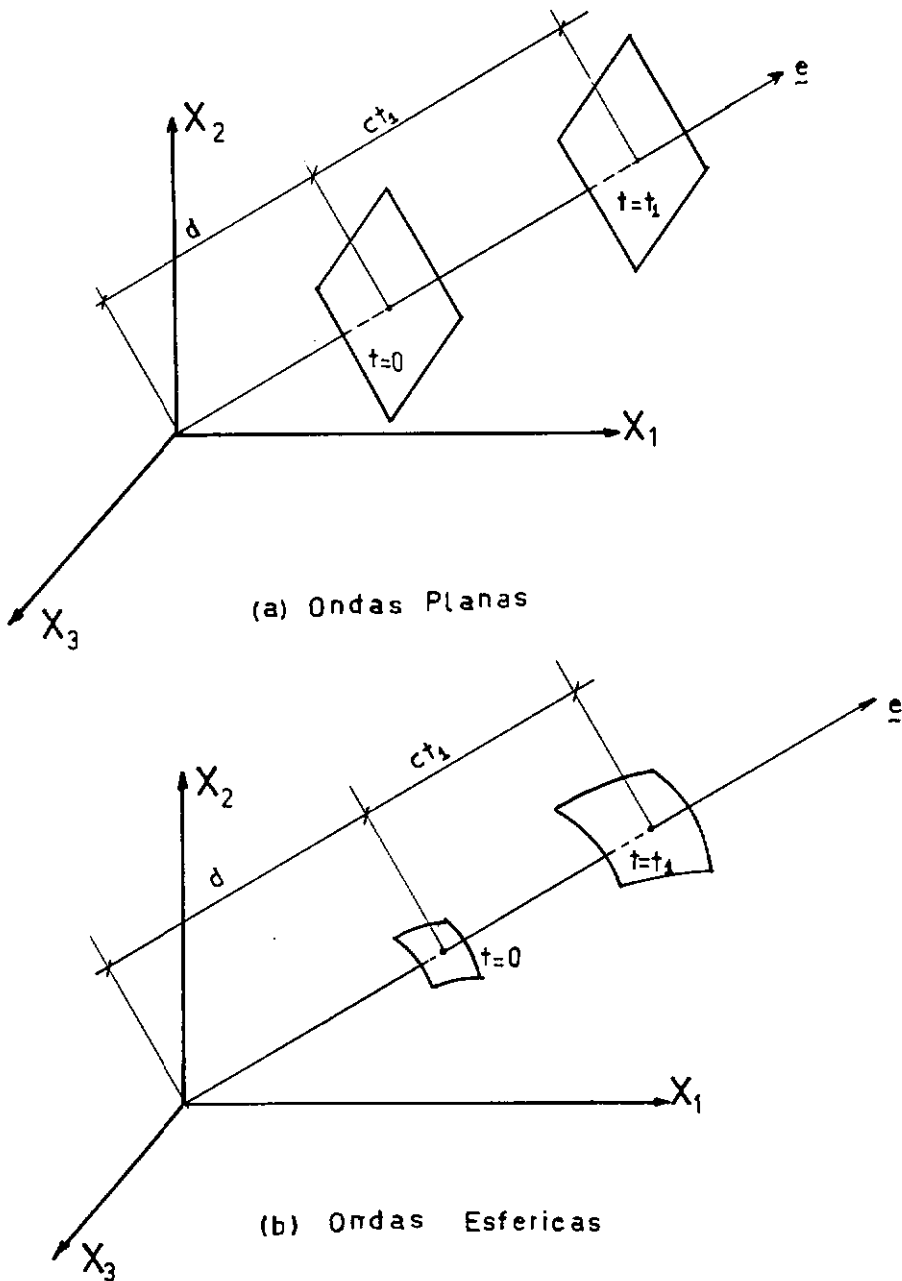


Figura 2.3.2 - Ondas Planas e Esféricas no Espaço

Com respeito ao movimento das partículas em relação à direção de propagação temos as denominadas ondas longitudinais cujo movimento das partículas coincide ou tem a mesma direção do sentido de propagação e as ondas transversais em que as partículas movimentam-se em uma direção perpendicular ao sentido da propagação, neste caso transferindo energia através de planos ortogonais ao avanço da onda.

Algumas ondas não são exclusivamente transversais ou longitudinais como é o caso das ondas que propagam-se na água, cujas partículas descrevem trajetórias elípticas enquanto a onda propaga-se, também é o caso em um sólido semi-infinito com as ondas de Rayleigh propagando na superfície.

As ondas luminosas no entanto são transversais, o campo elétrico e o magnético são perpendiculares à direção de propagação; as ondas acústicas ou de som são do tipo longitudinal.

As ondas podem ainda classificar-se como uni, bi e tridimensionais conforme o número de dimensões do meio em que elas propagam-se.

Segundo o comportamento de uma partícula do meio pela passagem de uma onda durante o tempo em que esta se propaga pode-se produzir um pulso ou onda única, assim cada partícula do meio material permanece em repouso até ser alcançada pela onda e move-se por um curto período de tempo voltando a seguir ao repouso.

Se uma série de pulsos é propagado produz-se então um trem de ondas e se é periódico o trem de ondas será periódico.

Com respeito ao tipo de problemas de propagação, podemos ter aqueles de comportamento transiente ou não estacionários e de comportamento harmônico no tempo, ambos de grande importância em muitas áreas da física e engenharia e requerem diferentes métodos de formulação e solução. Se considerarmos o termo não homogêneo na equação de onda, ou função de fonte, então podemos falar de problemas de radiação de ondas quando a fonte



é nula e temos condições iniciais prescritas para o problema. O caso de obstáculos com certas condições de contorno prescritos interagindo com algum campo de ondas incidentes (caso de fonte não nula e frequentemente considerada como ondas planas que vem do infinito) são denominados problemas de "scattering".

## 2.4 - ONDAS ELÁSTICAS

As diferentes classes de onda que podem ser propagadas por um sólido elástico sob certas condições podem ser deduzidas das equações da elastodinâmica.

### Equações da Elastodinâmica

Um corpo linearmente elástico, isotrópico e homogêneo  $\Omega + \Gamma$  (onde  $\Omega$  é o domínio do corpo e  $\Gamma$  seu contorno) fica definido por duas constantes elásticas independentes (Figura 2.4.1).

Estas constantes elásticas podem ser as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $G$ , onde

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{E \nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Sendo  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para escrever as equações usaremos notação indicial onde os índices (1, 2, 3) representaram os eixos coordenados (x, y, z). Para a diferenciação usaremos a vírgula com notação indicial, por exemplo  $u_{i,J} = \partial u_i / \partial x_J$ .

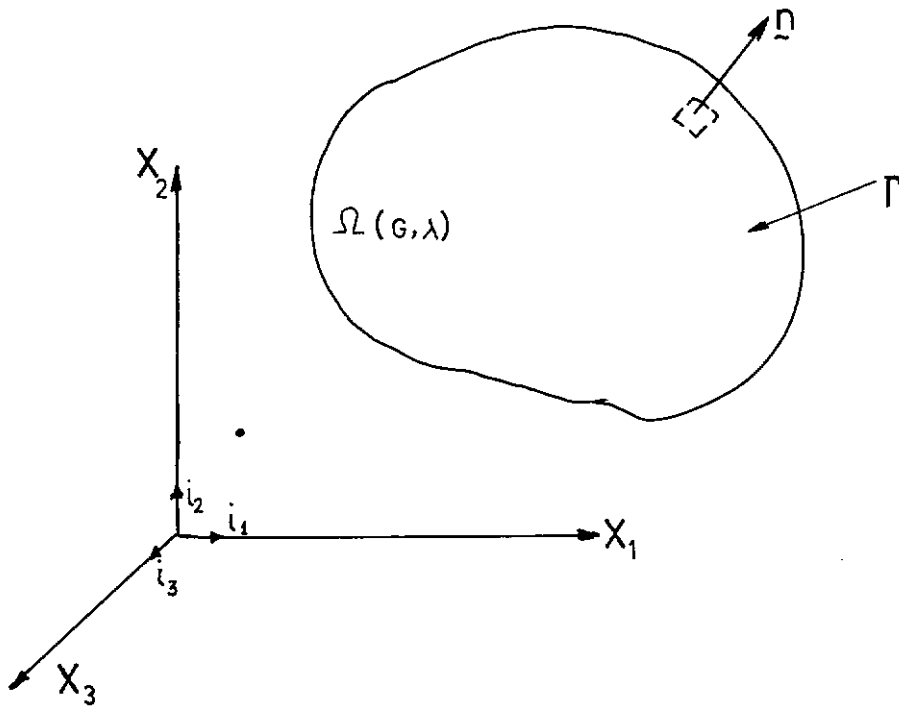


Figura 2.4.1 - Corpo Tridimensional com domínio  $\Omega$   
e Contorno  $\Gamma$

A seguir se apresentam as equações básicas da elasticidade linear e a obtenção da equação do movimento de Navier.

a) Equações do Movimento

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.4.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$ ,  $b_i$  e  $u_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são as componentes de tensão (Figura 2.4.2) forças de corpo de volume e vetor de deslocamentos respectivamente;  $\rho$  é a densidade de massa. Os pontos superiores nas variáveis indicam diferenciação parcial em relação ao tempo  $t$ , isto é  $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$ .

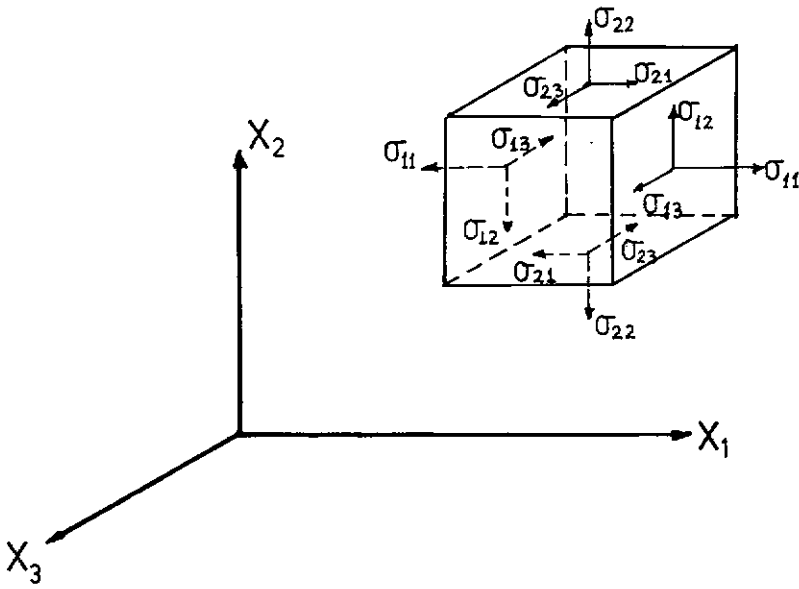


Figura 2.4.2 - Componentes de Tensão

b) Relações Deformações Específicas - Deslocamentos

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4.3)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  são as componentes de deformações específicas.

c) Lei de Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (2.4.4)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

## d) Condições de Contorno

$$\underline{u}_i(\underline{x}, t) = \bar{\underline{u}}_i(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \Gamma_1 \quad (2.4.5)$$

$$t_i(\underline{x}, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{t}_i(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \Gamma_2$$

onde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  e  $\bar{u}_i, \bar{t}_i, n_j$  são os deslocamentos prescritos, forças de superfícies prescritas e cossenos diretores da normal no ponto onde são consideradas as forças de superfície (Figura 2.4.3).

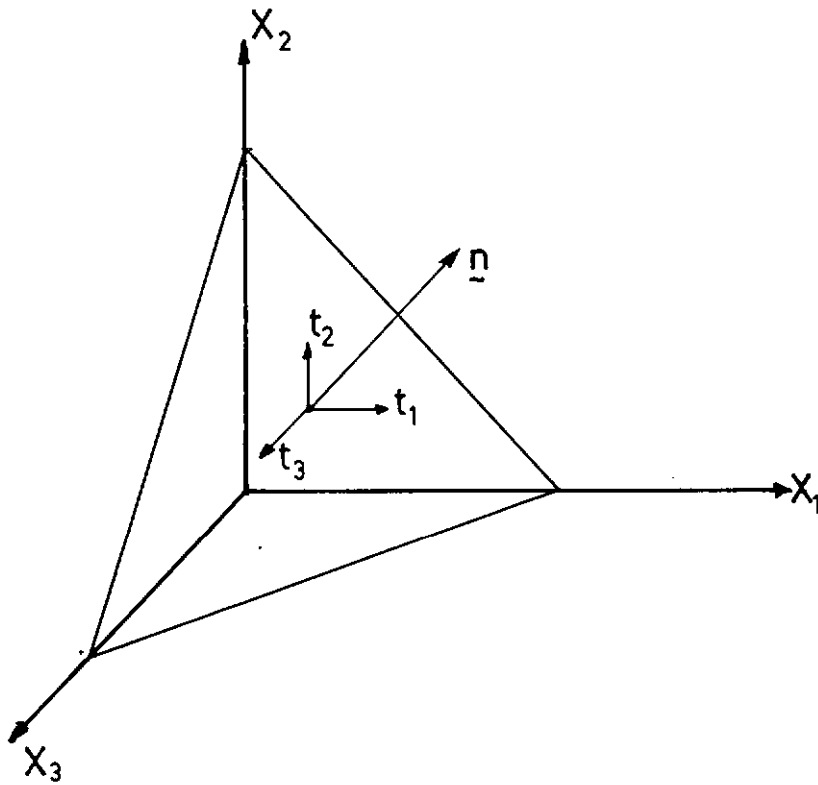


Figura 2.4.3 - Componentes das Forças de Superfície

## e) Condições Iniciais

$$u_i(\underline{x}, 0) = u_{i0}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega + \Gamma \quad (2.4.6)$$

$$t_i(\underline{x}, 0) = t_{i0}(\underline{x})$$

Usando a equação (2.4.3), as equações (2.4.2) e a segunda de

(2.4.5) podem ser escritos em função dos deslocamentos, conforme mostrado abaixo.

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4.7)$$

$$t_i = G(u_{i,n} + u_{j,i} n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j} n_i) \quad (2.4.8)$$

onde  $u_{i,n} = \frac{\partial u_i}{\partial n} = u_{i,j} \cdot n_j$

Substituindo (2.4.7) em (2.4.2) obtemos a equação do movimento de Navier em termos dos deslocamentos.

$$(\lambda + G) u_{i,ij} + G u_{j,ii} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.4.9)$$

$$\text{ou } (C_1^2 - C_2^2) u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j = \ddot{u}_j \quad (2.4.10)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são respectivamente as velocidades das ondas P e S respectivamente, descritas mais adiante.

### Propagação de Ondas Planas em Domínio Infinito

Sem considerar forças de volume a equação (2.4.9) pode ser escrita como

$$G \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + G) \nabla \nabla \cdot \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (2.4.11)$$

Sendo  $\underline{u}$  o vetor de deslocamento,  $\nabla$  e  $\nabla^2$  são o operador gradiente e laplaciana respectivamente definidos por:

$$\nabla = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

onde  $\underline{i}_1$ ,  $\underline{i}_2$  e  $\underline{i}_3$  são os vetores unitários mostrados na Figura 2.4.1. Seja um deslocamento plano propagando com velocidade  $C$  em uma direção definida por um vetor unitário de propagação  $\underline{n}$  definido por

$$\underline{u} = f(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct) \underline{e} \quad (2.4.12)$$

onde  $\underline{e}$  e  $\underline{n}$  são vetores unitários que definem as direções do movimento e da propagação respectivamente;  $\underline{x}$  é o vetor posição do ponto onde  $\underline{u}$  é considerado e  $\underline{x} \cdot \underline{n} = \text{constante}$  descreve um plano normal a  $\underline{n}$ . Assim, (2.4.12) representa uma onda plana cuja velocidade de propagação é  $C$ .

Substituindo (2.4.12) em (2.4.11) e utilizando as relações seguintes

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = (\underline{n} \cdot \underline{e}) f'(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct)$$

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = (\underline{n} \cdot \underline{e}) f''(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct) \underline{n}$$

$$\nabla^2 \underline{u} = f''(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct) \underline{e}$$

$$\ddot{\underline{u}} = c^2 f''(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct) \underline{e}$$

sendo  $f'$ ,  $f''$  derivadas de função  $f$  em relação a  $(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct)$  obtemos

$$\{G \underline{e} + (\lambda + G) (\underline{n} \cdot \underline{e}) \underline{n} - \rho C^2 \underline{e}\} f''(\underline{x} \cdot \underline{n} - Ct) = 0$$

$$\text{ou} \quad (G - \rho C^2) \underline{e} + (\lambda + G) (\underline{n} \cdot \underline{e}) \underline{n} = 0 \quad (2.4.13)$$

Como  $\underline{n}$  e  $\underline{e}$  são dois vetores diferentes a equação (2.4.13) só pode ser atendida de duas maneiras

$$(a) \quad \underline{e} = \pm \underline{n}$$

$$\text{e } (b) \quad \underline{n} \cdot \underline{e} = 0$$

Com a condição (a) temos então  $\underline{e} \cdot \underline{n} = \pm 1$  e de (2.4.13) obtemos

$$C = C_1 = \left( \frac{\lambda + 2G}{\rho} \right)^{1/2}$$

o qual significa que o vetor dos deslocamentos associado com uma onda plana elástica propaga com velocidade  $C_1$  na mesma direção da propagação. Isto é, uma onda do tipo longitudinal.

Neste caso a rotação  $\nabla \times \underline{u} = (\underline{n} \times \underline{e}) f'(\underline{x} \cdot \underline{n} - ct) = 0$ , razão pela qual a onda longitudinal é definida como irrotacional, também é denominada de onda primária ou onda P.

No caso da condição (b) temos que ambos termos da equação (2.4.13) devem anular-se, este ocorre para:

$$C = C_2 = \left( \frac{G}{\rho} \right)^{1/2}$$

cujo significado implica que o vetor dos deslocamentos associados com uma onda plana elástica propagando com velocidade  $C_2$  tem uma direção ortogonal à direção de propagação. A divergência  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ , por esta razão esta onda é denominada de onda rotacional. Onda secundária, distorsional ou onda S são outras denominações também encontradas na literatura. Geralmente o plano formado pelas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  são escolhidas para conter o vetor  $\underline{n}$ , isto é, a direção do movimento vetorial da onda P (Figura 2.4.4). O vetor do movimento da onda S pode ser decomposto em duas componentes, uma no plano formado pelos eixos coordenados  $x_1$  e  $x_2$  e a outra na perpendicular ao plano. Estas componentes são denominadas "onda SV" e "onda SH", ondas de corte polarizadas vertical e horizontal respectivamente. As ondas P e SV formam as componentes do movimento plano en-

quanto a onda SH representa o movimento antiplano.

Quando estas ondas vão propagando e encontram uma descontinuidade, então fenômenos de reflexão, refração e difração são produzidos. A resultante do movimento da onda é uma superposição de todas as contribuições.

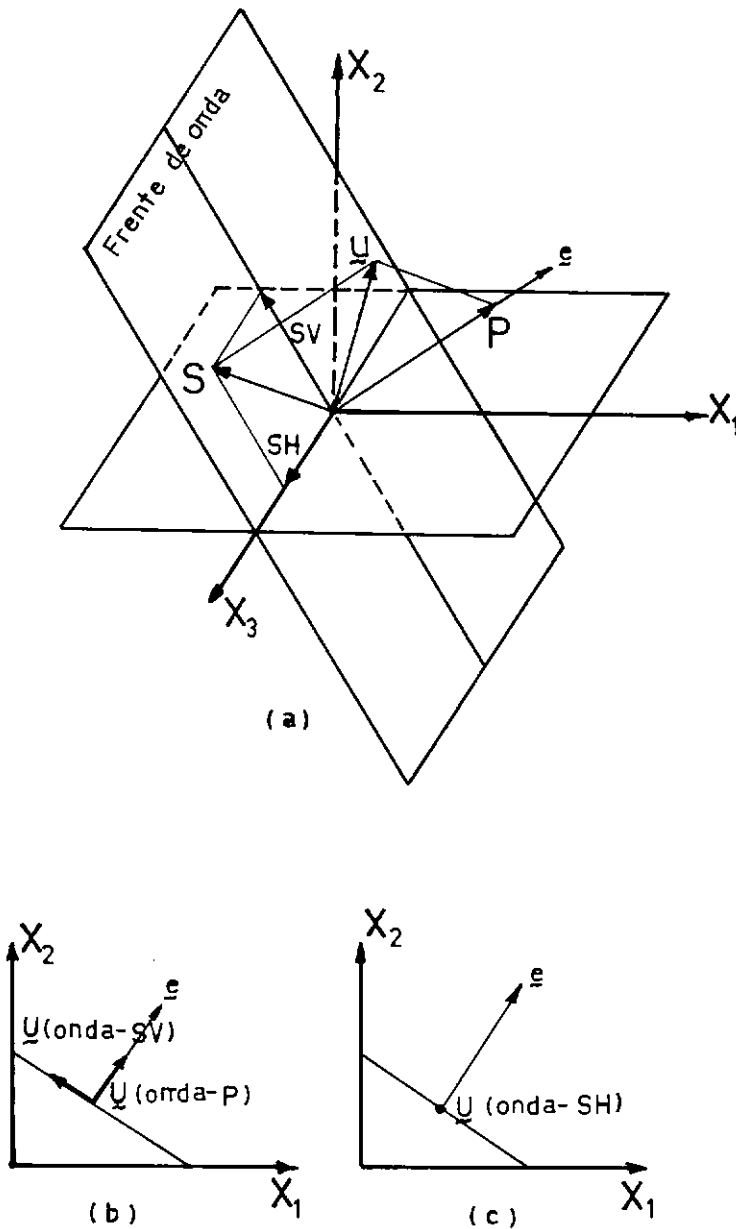


Figura 2.4.4 - Propagação de Ondas Planas. (a) No Espaço  
(b) Ondas P e SV (c) Ondas SH.



### Ondas de Rayleigh e Love

Em um corpo elástico é possível ter outro tipo de ondas as quais propagam-se na superfície e penetram somente um pouco no interior do corpo. Estas ondas são denominadas ondas de superfície e a mais simples é a onda de Rayleigh [6] que ocorre na superfície livre de um sólido semi-infinito, isotrópico e homogêneo. É uma onda importante porque as grandes perturbações ou distorções do horizonte produzidas nos terremotos são devidas às ondas de Rayleigh. Sua amplitude diminui exponencialmente com o aumento da distância em relação à superfície livre (Figura 2.4.5).

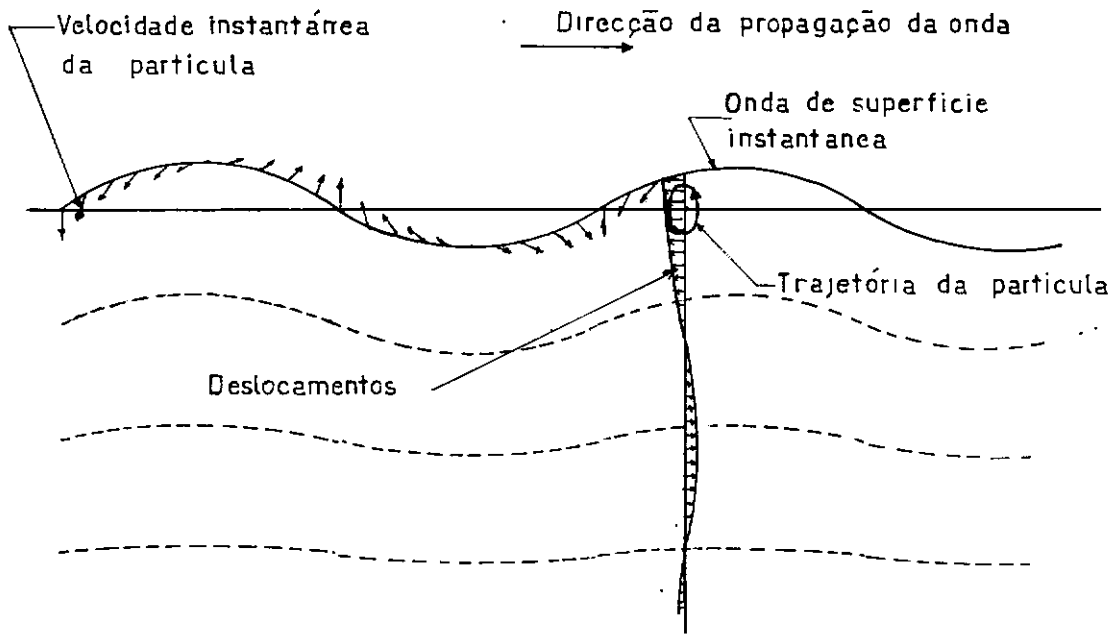


Figura 2.4.5 - Ondas de Rayleigh

O movimento das partículas são elípticas retrógradas em contraste à órbita elíptica direta para as ondas de superfície na água.

Também é possível o tipo de onda denominada onda de Love [6] que é uma onda do tipo SH, onda polarizada de corte horizontal devida à existência de diferentes camadas sob a

superfície livre com diferentes velocidades de propagação  $C_2$ .

## 2.5 - OUTROS TIPOS DE ONDAS

### 2.5.1 - Ondas Eletromagnéticas

O meio pelo qual as ondas eletromagnéticas se propagam não possui nenhuma elasticidade e inércia, mas o transporte de energia está na capacidade de armazenar energia nos campos elétrico e magnético. O campo elétrico é equivalente ao campo de um movimento de um fluido irrotacional e as formulações matemáticas do movimento de ondas acústicas e ondas eletromagnéticas são similares [37].

Se  $E$  e  $H$  são os campos elétricos e magnéticos ambos com magnitude e direção em cada ponto em um meio homogêneo e isotrópico de constantes dielétrica  $k$  e permeabilidade magnética  $\mu$  sem condutividade elétrica  $\sigma$ , então as equações de campo são:

$$\begin{aligned}\frac{k}{C} \frac{\partial E}{\partial t} &= \nabla \times H \\ -\frac{\mu}{C} \frac{\partial H}{\partial t} &= \nabla \times E \\ \nabla \cdot H &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 0\end{aligned}\tag{2.5.1.1}$$

onde  $C$  é a velocidade de propagação da onda eletromagnética no vácuo. James Clerk Maxwell reconheceu em torno de 1863 que estas equações poderiam ser combinadas resultando em equações de onda para o campo elétrico e o magnético. Assim ele predisse a existência de ondas eletromagnéticas quando não haviam suspeitas de sua existência. Estas ondas são do tipo transversal.

Ao combinar as equações (2.5.1) tem-se as equações das ondas elétrica e magnética respectivamente.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 E \quad (2.5.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 H$$

com  $k = \mu = 1$  (vácuo) e sendo  $\nabla^2$  o Laplaciano.

## 2.5.2 - Ondas Acústicas

As ondas de som ou acústicas são ondas do tipo longitudinal. As moléculas do ar movimentam-se na direção de propagação, não existem alternadamente picos e vales como nas ondas na água superficial, senão alternadas compressões e dilatações. O ar tem massa, densidade e volume elástico. A elasticidade faz com que o fluido resista ao ser comprimido voltando para seu estado original, a inércia é dada pela densidade de massa do fluido, tendo assim as duas propriedades para uma propagação de uma perturbação através de ondas.

As equações do movimento de ondas acústicas de pequena amplitude e em um processo adiabático [39] são:

$$\frac{\partial p}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.5.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

A primeira equação governa a onda acústica ou de pressão e a segunda governa o deslocamento das partículas do ar.

$C$  é a velocidade de propagação de onda acústica no meio e ela está dada por:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \quad (2.5.2.2)$$

onde

$\gamma = C_p / C_v$  sendo  $C_p$  o calor específico a pressão constante e  $C_v$  o calor específico a volume constante;  $\rho$  é densidade do fluido e  $p_0$  é a pressão inicial do fluido.

## CAPÍTULO III - EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO PARA PROBLEMAS TRANSIENTES GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO ESCALAR DE ONDA

### 3.1 - INTRODUÇÃO

A equação escalar da onda é encontrada governando diversos fenômenos físicos tais como, movimento transversal de cabos e membranas, movimento longitudinal de barras, determinação de distribuição de voltagem e corrente em linhas de transmissões elétricas [1], "scattering" de ondas acústicas por obstáculos de diversas geometrias [14], [15], [19], [28], etc. Podemos acrescentar também que algumas equações diferenciais parciais podem ser reduzidas a um conjunto de equações de onda usando os potenciais definidos por Lamé [12], [6], como no caso da equação de Navier para problemas 2-D, esta pode ser substituída por equações de ondas escalares e que sua representação na forma integral permite uma compreensão mais direta das variáveis físicas presentes em um determinado problema.

Neste capítulo abrangeremos a transformação de equação escalar da onda na forma de equação diferencial parcial numa equação integral. Usaremos a solução fundamental ou função de Green para domínio infinito com o método dos resíduos ponderados para tal fim, obtendo a denominada equação integral de Kirchhoff ou equação de potenciais retardados de Kirchhoff a qual é encontrada em eletromagnetismo [30], em hidrodinâmica [31], nos fenômenos de difração da luz [3], [25] explicados pela teoria escalar.

### 3.2 - EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR TRANSIENTE

A equação de onda escalar não homogênea é:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\gamma \quad (3.2.1)$$

onde  $u$  é o potencial ou variável física;  $\gamma$  é a denominada densidade de fonte com dependência do espaço e tempo,  $t$  o tempo e  $C$  a velocidade de propagação da onda.

As condições de contorno associadas a um problema de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  são:

$$\begin{array}{ll} \text{Essenciais} & u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \\ \text{Naturais} & p = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_2 \end{array} \quad (3.2.2)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ,  $p$  é a derivada de  $u$  em relação à direção  $\underline{n}$  ou normal a  $\Gamma$ ,  $\bar{u}$  e  $\bar{p}$  indicam valores conhecidos de  $u$  e  $p$  no contorno.  $p$  pode também ser escrito como  $p = \underline{\nabla}u \cdot \underline{n}$ , onde  $\underline{\nabla}u$  é o gradiente de  $u$  e  $\underline{n}$  o vetor unitário normal a  $\Gamma$ .

Temos ainda condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) \\ v(\underline{x}, 0) &= v_0(\underline{x}) \quad \text{em } \underline{x} \in \Omega \quad \text{em } t = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$u_0$  e  $v_0$  são os valores prescritos para  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  em  $t=0$  no domínio  $\Omega$  incluindo seu contorno  $\Gamma$ .

### 3.3 - FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Quando trabalhamos em funções de Green é necessário empregar funções delta de Dirac. Em uma dimensão a delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\delta(x - a) &= 0 && \text{quando } x \neq a \\ \delta(x - a) &= \infty && \text{quando } x = a\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

$$\text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

As derivadas do delta de Dirac são tais que:

$$\begin{aligned}\delta^{(n)}(x - a) &= 0 && \text{quando } x \neq a \quad \text{e} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x - a) f(x) dx &= (-1)^n f^{(n)}(a)\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

onde  $\delta^{(n)}(x - a)$  e  $f^{(n)}(a)$  são  $\frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x - a)$  e  $\left. \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right|_{x=a}$  respectivamente. O anterior pode ser ampliado para um domínio bi ou tridimensional considerando que o delta de Dirac pode ser definido como:

$$\delta(q - s) = 0 \quad \text{quando } q \neq s$$

$$\text{e} \quad \int_{\Omega} \delta(q - s) f(q) d\Omega(q) = f(s)$$

onde  $s$  e  $q$  representam dois pontos no domínio  $\Omega$ .

### 3.4 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL TRIDIMENSIONAL

A solução fundamental ou função de Green para a equação de onda escalar é a solução da equação (3.2.1) para um domínio infinito e uma fonte concentrada:

$$\gamma = 4\pi \delta(q - s) \delta(t - \tau)\tag{3.4.1}$$

A equação (3.2.1), para este caso pode escrever-se:

$$\nabla^2 u^* - \ddot{u}^*/C^2 = -4\pi \delta(q - s) \delta(t - \tau) \quad (3.4.2)$$

onde  $u^*$  é o potencial devido a uma fonte representada por um impulso em  $t = \tau$  localizada em  $q = s$ ;  $q$  e  $s$  são os denominados pontos campos e fonte respectivamente na teoria do potencial, cuja notação será mantida neste capítulo.

A solução fundamental  $u^*$ , tem as seguintes propriedades:

i ) *Causalidade*

$$u^*(q, t; s, \tau) = 0 \quad \text{quando} \quad C(t - \tau) < |q - s| \quad (3.4.3)$$

sendo  $|q - s|$  a distância do ponto campo  $q$  ao ponto fonte  $s$ .

ii ) *Reciprocidade*

$$u^*(q, t; s, \tau) = u^*(s, -\tau; q, -t) \quad (3.4.4)$$

iii) *Translação no Tempo*

$$u^*(q, t + t_1; s, \tau + t_1) = u^*(q, t; s, \tau) \quad (3.4.5)$$

A solução fundamental  $u^*$  em duas dimensões [5], [16], é:

$$u^*(q, t; s, \tau) = \frac{2C}{\sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2}} H\left[C(t - \tau) - r\right] \quad (3.4.6)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside, dada por:

$$H(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x < a \end{cases}$$



Em três dimensões a solução fundamental [11], [5],  
[32] é

$$u^*(q, t; s, \tau) = \frac{\delta|r/C - (t - \tau)|}{r} = \frac{C}{r} \delta[r - C(t - \tau)] \quad (3.4.7)$$

onde  $r = |\underline{q} - \underline{s}|$  (Figura 3.4.1).

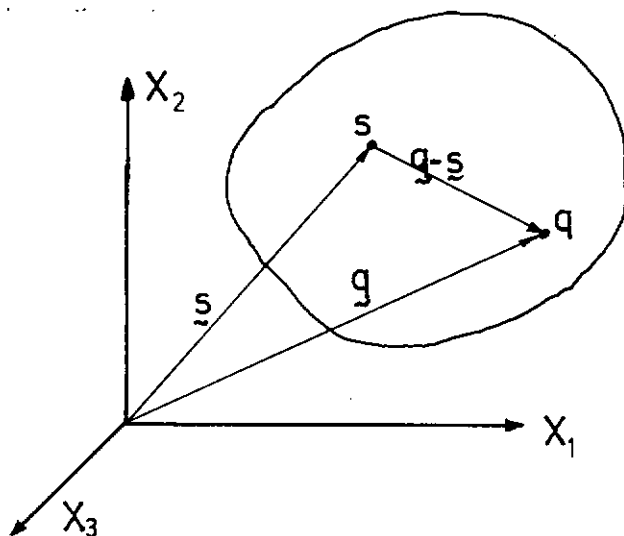


Figura 3.4.1 - Definição do Vetor  $\underline{r}$

### 3.5 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE KIRCHHOFF (PARA A REPRESENTAÇÃO DE EQUAÇÃO ESCALAR DE ONDA TRANSIENTE)

Quando  $t$  é substituído por  $\tau$ , a equação (3.2.1) fica

$$\nabla^2 u(q, \tau) - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u(q, \tau)}{\partial \tau^2} = -\gamma(q, \tau) \quad (3.5.1)$$

e usando a propriedade da reciprocidade (equação 3.4.4), podemos escrever a equação 3.4.2 [11, 5], como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^*(q, t; s, \tau) - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u^*(q, t; s, \tau)}{\partial \tau^2} \\ = -4\pi \delta(q - s) \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Considerando que  $u^*$  e  $u$  satisfazem as equações (3.4.2) e (3.5.1) respectivamente e além do mais  $u^*$  e  $u$  supõem-se distribuídos respectivamente nas regiões  $\Omega + \Gamma$  e  $\Omega^* + \Gamma^*$  (Figura 3.5.1) as quais têm as mesmas propriedades físicas e tal que  $\Omega^*$  contém a  $\Omega + \Gamma$ .

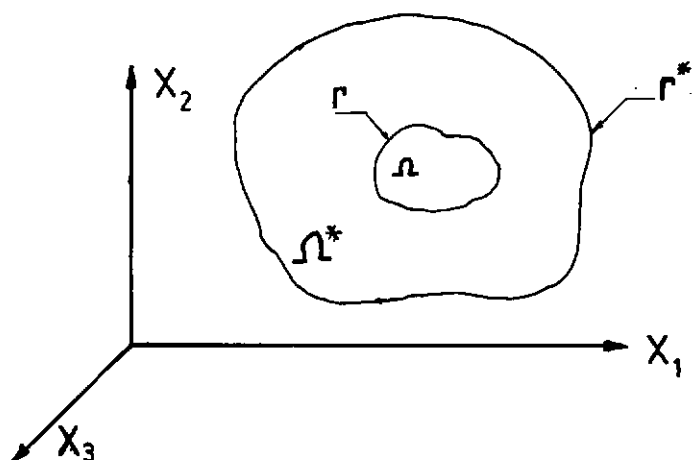


Figura 3.5.1 - Região  $\Omega^* + \Gamma^*$  contém a  $\Omega + \Gamma$

A solução fundamental relativa ao espaço infinito  $u^*$  deve obedecer as condições de radiação e regularidade com  $\Gamma^*$  colocado no infinito, isto assegura que não existem ondas voltando do infinito ao interior do corpo. Se considerarmos uma grande esfera  $\Sigma r$  de raio  $r$ , centrada num ponto  $\zeta$ , a qual contém o contorno  $\Gamma$  da região em consideração (Figura 3.5.2) e com  $r$  aproximando ao infinito e impondo a condição que o campo em  $\zeta$  não recebe nenhuma contribuição de  $\Sigma r$  obtemos da equação integral de Kirchhoff (3.5.17), a condição de radiação de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{C} \dot{u} \right) = 0 \quad (3.5.3)$$

e a condição de regularidade

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u = 0 \quad (3.5.4)$$

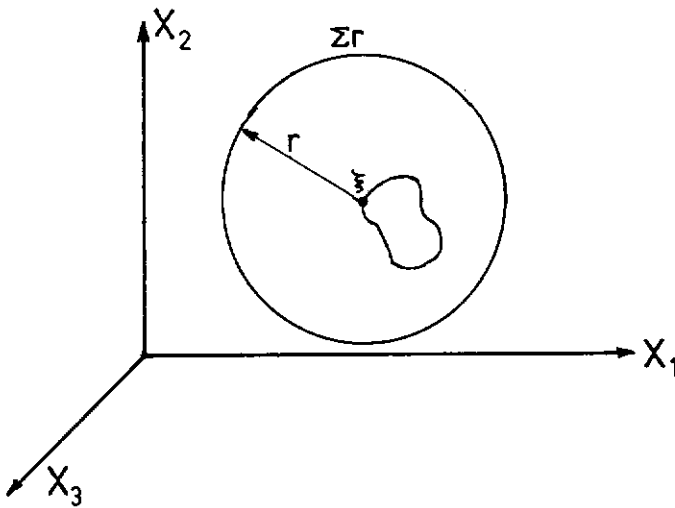


Figura 3.5.2 - Simulação de um Domínio Infinito por uma Esfera Infinita

Seja a seguinte relação de resíduos ponderados para a equação diferencial (3.2.1).

$$\int_0^{t^+} \int_{\Omega} \left( \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \gamma \right) u^* d\Omega d\tau = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma_2} (p - \bar{p}) u^* d\Gamma d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) p^* d\Gamma d\tau \quad (3.5.5)$$

onde  $p^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$  e  $t^+$  representa  $t + \varepsilon$  sendo  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno.

Usando o teorema da divergência duas vezes ao termo que contém o Laplaciano da equação (3.5.5) e integrando por parte duas vezes com relação a  $\tau$  para o termo que contém a derivada no tempo,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , obtém-se [5]

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} (u^* p - u p^*) d\Gamma d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \left( \nabla^2 u^* - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) u d\Omega d\tau + \\
& + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\tau + \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \tau} u - \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right) \bigg|_0^{t^+} d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Levando em conta a condição de causalidade, temos:

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} u \right|_{\tau=t^+} = \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} u^* \right|_{\tau=t^+} = 0 \tag{3.5.7}$$

Portanto a equação (3.5.6) pode escrever-se como:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} (u^* p - u p^*) d\Gamma d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Omega} 4\pi \delta(q-s) \delta(t-\tau) u d\Omega d\tau + \\
& \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\tau - \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} (v_0^* u_0 - v_0 u_0^*) d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

$$\text{onde } v_0^* = \left| \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \text{ e } u_0^* = \left| u^* \right|_{\tau=0}$$

Usando as propriedades de função delta de Dirac no segundo termo da esquerda da equação (3.5.8) e adotando que  $v_0^*$  e  $u_0^*$  são nulos em  $\Omega$  temos:

$$\begin{aligned}
u(s, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^*(q, t; s, \tau) p(q, \tau) d\Gamma(q) d\tau - \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p^*(q, t; s, \tau) u(q, \tau) d\Gamma(q) d\tau \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^*(q, t; s, \tau) \gamma(q, \tau) d\Omega(q) d\tau
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Colocando a solução fundamental dada pela equação (3.4.7) e usando suas propriedades a integração no tempo é eliminada.

O primeiro termo do lado direito da equação (3.5.9) fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma d\tau &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \delta(r/C - (t - \tau)) p(q, \tau) d\tau d\Gamma = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \delta(\tau - tr) p(q, \tau) d\tau d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

onde  $tr = t - r/C$ , é o "tempo retardado".

Para o segundo termo do lado direito da equação (3.5.9) devemos obter  $p^*$ :

$$p^*(q, t; s, \tau) = \frac{\partial}{\partial n} \left[ u^*(q, t; s, \tau) \right] = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u^*}{\partial r} \quad (3.5.11)$$

Logo:

$$p^* = \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta\left(\frac{r}{C} - (t - \tau)\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \delta\left(\frac{r}{C} - (t - \tau)\right) \right\} \quad (3.5.12)$$

Ficando finalmente:

$$p^* = \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta(\tau - tr) + \frac{1}{Cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \delta(\tau - tr) \right] \right\} \quad (3.5.13)$$

Assim podemos escrever:

$$\int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma d\tau = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \int_0^{t^+} \left( -\frac{1}{r^2} \delta(\tau - tr) + \right. \quad (3.5.14)$$

$$\left. + \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \delta(\tau - tr) \right) u d\tau d\Gamma \right.$$

Considerando a equação (3.5.14) pode ser escrita como:

$$\int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma d\tau = \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(q, tr) + \right. \quad (3.5.15)$$

$$\left. + \frac{1}{Cr} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(q, \tau) \right)_{\tau=tr} \right\} d\Gamma$$

A última integral do lado direito da equação (3.5.9) que contém a densidade de fontes pode ser transformada como indicada abaixo,

$$\int_0^{t^+} \int_{\Omega} u^* \gamma d\Omega d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \int_0^{t^+} \gamma(q, \tau) \delta(\tau - tr) d\Gamma d\Omega = \quad (3.5.16)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \gamma(q, tr) d\Omega$$

Colocando os resultados finais das integrais indicadas nas equações (3.5.10), (3.5.15) e (3.5.16), a equação integral (3.5.9) fica:

$$u(s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r(s, q)} p(q, tr) d\Gamma(q) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r(s, q)}{\partial n(q)} \left\{ \frac{1}{r^2(s, q)} u(q, tr) + \right. \quad (3.5.17)$$

$$\left. + \frac{1}{Cr(s, q)} \left( \frac{\partial u(q, t)}{\partial \tau} \right)_{\tau=tr} \right\} d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r(s, q)} \gamma(q, tr) d\Omega(q)$$

Na expressão anterior é colocada entre parênteses a dependência das variáveis em relação às coordenadas de campo a fonte, para melhor clareza destas relações.

A equação (3.5.17) é conhecida como equação integral de Kirchhoff e é considerada a representação matemática do princípio de Huygens.

Assim a equação integral (3.5.17) fisicamente estabelece que o potencial em um ponto  $s$  no instante  $t$  pode ser calculado das contribuições de potenciais e fluxos no contorno produzidos em instantes anteriores, mais uma contribuição de uma fonte potencial distribuída relativa também a tempos anteriores. Esta diferença de tempos deve-se ao tempo que demoram em viajar as contribuições com velocidade  $C$  até o ponto  $s$ .

Para usar a equação integral de Kirchhoff para o cálculo dos potenciais em pontos internos deve-se conhecer  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  e  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  do contorno, a função da fonte  $\gamma$  e as condições iniciais, mas, os valores relativos ao contorno devem ser previamente conhecidos. Isto pode ser feito a partir de uma nova equação integral, que é a equação (3.5.17) particularizada para o contorno, neste caso existirão integrais de contorno singulares que devem ser calculadas no sentido principal de Cauchy.

Quando o contorno é uma superfície suave do tipo Liapunov [24] ("superfície que possui plano tangente e normal únicas em qualquer de seus pontos mas não necessariamente curvatura em cada ponto"), o domínio  $\Omega$  pode ser aumentado por uma semi-esfera pequena de raio  $\epsilon$ , cujo centro está no ponto  $s$  do contorno (Figura 3.5.3).

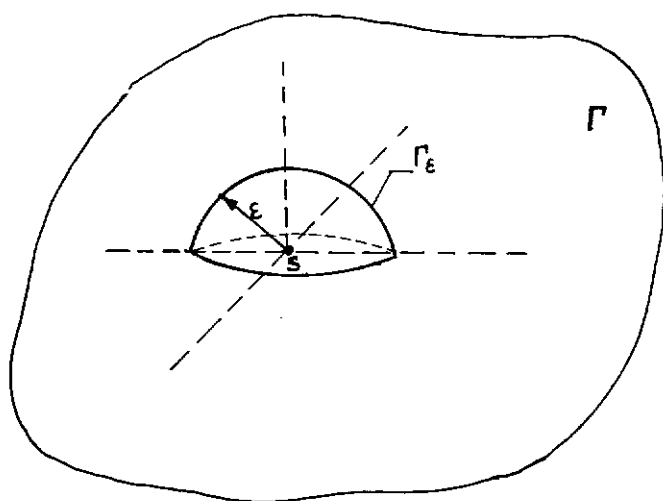


Figura 3.5.3 - Domínio Aumentado por uma Semi-Esfera de raio  $\varepsilon$  no ponto S do Contorno

Assim, a equação integral (3.5.17) sem considerar a integral de fonte fica:

$$\begin{aligned}
 u(s, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(q, tr) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} \right\} d\Gamma + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} u(q, tr) d\Gamma + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\Gamma - \Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$  resultando nos seguintes valores, para as integrais sobre  $\Gamma_\varepsilon$  indicados na equação (3.5.18), a dedução de tais integrais pode-se encontrar na referência [5].

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma = 0 \tag{3.5.19}$$



$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{r^2} u(q, tr) d\Gamma = \frac{1}{2} u(s, t) \quad (3.5.20)$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} (q, \tau) \right|_{\tau=tr} d\Gamma = 0 \quad (3.5.21)$$

A equação integral de Kirchhoff usada no contorno fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(s, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(q, tr) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} \right\} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \gamma(q, tr) d\Omega \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Se considerarmos uma fonte concentrada em  $q = q_S$ , podemos escrever

$$\gamma(q, t) = f(t) \delta(q - q_S) \quad (3.5.23)$$

e a integral da fonte será:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{f(tr)}{r} \delta(q - q_S) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{f(t - r(s, q)/C)}{r(s, q)} \delta(q - q_S) d\Omega \\ &= \frac{f(t - r(s, q_S)/C)}{r(s, q_S)} = \frac{f(trs)}{r_s} \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

onde  $trs = t - r_s/C$  e  $r_s = |\underline{s} - \underline{q}_S|$

Assim a equação (3.5.22) pode-se ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(s, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} \mu(q, tr) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} \right\} d\Gamma + \frac{f(trs)}{4\pi r_s} \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

Se generalizarmos a equação (3.5.25) por uso do coeficiente  $C(s)$ , a equação ficará:

$$\begin{aligned} C(s) u(s, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ \frac{1}{r^2} u(q, tr) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{Cr} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} \right\} d\Gamma + \frac{f(trs)}{4\pi r_s} \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

$$\text{onde } C(s) = \begin{cases} 0 & \text{se o ponto } S \text{ está fora do domínio } \Omega \\ 1/2 & \text{Se o ponto } S \text{ está no contorno } \Gamma \\ 1 & \text{Se o ponto } S \text{ está no domínio } \Omega \end{cases}$$

Podemos notar que (3.5.26) não tem integração no tempo, mas existe a dependência através de todas as variáveis as sumidas como campos em relação ao potencial assumido como fonte pela função tempo retardado  $tr = t - r/C$ .

A derivada  $\frac{\partial r}{\partial n}$  pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla_{\underline{r}} \cdot \underline{n} = \frac{\underline{r}_j \cdot \underline{n}_j}{r} = \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}}{r} \quad (3.5.27)$$

Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} C(s) u(s, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} p(q, tr) d\Gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} u(q, tr) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{C} \left| \frac{\partial u(q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=tr} \right\} d\Gamma + \frac{f(trs)}{4\pi r_s} \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

## CAPÍTULO IV - MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS TRANSIENTES GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Usaremos funções de interpolação no tempo e no espaço as quais em geral podem aproximar de uma forma diferente o potencial  $u$ , sua derivada normal  $p$ , como também a derivada do potencial em relação ao tempo. Estas funções de interpolação são similares as usadas no método dos elementos finitos. Este procedimento permite que a nossa equação integral (3.5.26) possa ser discretizada em relação ao tempo e espaço através de valores nodais para as incógnitas, resultando um sistema de equações algébricas lineares ficando assim ao alcance dos algoritmos computacionais. Para o cálculo dos potenciais em pontos internos é usado o mesmo procedimento colocando  $C(s) = 1$  em (3.5.26) como é usual no método dos elementos de contorno.

Para o avanço no tempo de forma discreta consideraremos que a cada intervalo de tempo  $\Delta t$  um novo problema deve ser resolvido, assim ao final de cada "time-step" conhecem-se os valores de  $u(q, t)$  e  $p(q, t)$  no contorno, que juntamente com os valores obtidos em "time-steps" anteriores vão permitir o cálculo das incógnitas nodais para o intervalo de tempo seguinte, portanto a equação integral é aplicada de 0 a  $\Delta t$ ,  $\Delta t$  a  $2\Delta t$ , etc. Nossa origem no tempo é o tempo igual a zero, onde conhecemos as condições iniciais no contorno do problema. Condições iniciais no domínio não foram consideradas no trabalho.

Como a equação integral não tem integração no tempo, diminuí o processo de cálculo numérico, mas em contraparti-

da faz aumentar a complexidade dos algoritmos de solução numérica, por causa das relações entre as variáveis através de tempos retardados.

## 4.2 - DISCRETIZAÇÃO

Adotaremos nesta tese aproximações constantes para as variáveis em relação ao espaço, enquanto em relação ao tempo, serão consideradas duas possibilidades: constante e linear. No capítulo V são apresentados os esquemas para os tipos de combinações que serão estudados.

### 4.2.1 - Discretização no Espaço

Seja o contorno  $\Gamma$  dividido em  $N$  elementos que geram  $NN$  nós. O potencial  $u(q, t)$ , a derivada normal do potencial  $p(q, t)$  e a sua derivada em relação ao espaço  $\dot{u}(q, t)$  de um elemento  $K$  qualquer serão constantes no próprio elemento. Ao adotarmos a formulação de elementos constantes, podemos escrever então para o domínio do elemento  $K, (q \in \Gamma_k)$ :

$$\begin{aligned} u(q, t) &= u_k(t) \\ p(q, t) &= p_k(t) \\ \dot{u}(q, t) &= \dot{u}_k(t) \end{aligned} \tag{4.2.1.1}$$

A geometria do próprio elemento será aproximada linearmente; se  $\zeta$  e  $\eta$  definem as coordenadas naturais do próprio elemento, as coordenadas globais dele podem relacionar-se às naturais como:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{\ell=1}^{NS} X_{k\ell} \psi_{\ell}(\zeta, \eta) \\
 y &= \sum_{\ell=1}^{NS} Y_{k\ell} \psi_{\ell}(\zeta, \eta) \\
 z &= \sum_{\ell=1}^{NS} Z_{k\ell} \psi_{\ell}(\zeta, \eta)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.1.2}$$

onde  $\psi_{\ell}(\zeta, \eta)$  são funções de interpolações lineares iguais às empregados no MEF [7] em problemas bidimensionais. Nesta forma um vetor de posição  $\underline{r}(x, y, z)$  de um ponto qualquer do elemento  $K$ , fica definido pelas coordenadas naturais  $\zeta$  e  $\eta$  através da função  $\underline{r}(\zeta, \eta)$ .

Assim a área  $dS$  de um elemento diferencial  $d\Gamma$ , [7], [2], será dado por:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta} \right| d\zeta d\eta$$

$$d\Gamma = |J| d\zeta d\eta$$

$$\text{sendo } |J| = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \zeta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta} \right| = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{1/2} \tag{4.2.1.3}$$

$$\text{onde } J_1 = \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)$$

$$J_2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)$$

$$J_3 = \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)$$

Agora, se escrevemos a equação integral para um determinado instante de tempo  $t = m\Delta t$  ( $m$ , inteiro natural) para todo nó  $j$  do contorno, teremos a seguinte expressão ao subs

tituir os valores de  $u(q, t)$ ,  $p(q, t)$  e  $\dot{u}(q, t)$  pelas suas aproximações

$$\begin{aligned}
 4\pi C(s_j) u_j(t) = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{p_k(tr)}{R_{jk}} |J|_k d\zeta d\eta \\
 & + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{(\tilde{R} \cdot \tilde{n})_{Jk}}{R_{jk}^3} \cdot u_k(tr) |J|_k d\zeta d\eta \\
 & + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{(\tilde{R} \cdot \tilde{n})_{Jk}}{C R_{jk}^2} \cdot \dot{u}_k(tr) |J|_k d\zeta d\eta \\
 & + \frac{f(trs)}{R_S} \quad \text{com } J = 1, 2, 3 \dots N
 \end{aligned} \tag{4.2.1.4}$$

Sendo  $tr = t - R_{jk}/C$  e  $trs = t - R_{js}/C$ .

A expressão (4.2.1.4) escreve-se como:

$$\begin{aligned}
 4\pi C(s_j) u_j(t) = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \alpha_{jk}(\zeta, \eta) p_k(tr) d\zeta d\eta + \\
 & + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \beta_{jk}(\zeta, \eta) u_k(tr) d\zeta d\eta + \\
 & + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \gamma_{jk}(\zeta, \eta) \dot{u}_k(tr) d\zeta d\eta + \frac{f(trs)}{R_S}
 \end{aligned} \tag{4.2.1.5}$$

onde

$$\alpha_{jk}(\zeta, \eta) = \frac{|J|_k}{R_{jk}}$$

$$\beta_{jk}(\zeta, \eta) = \frac{|J|_k \cdot (\underline{R} \cdot \underline{n})_{jk}}{R_{jk}^3} \quad (4.2.1.6)$$

$$\gamma_{jk}(\zeta, \eta) = \frac{|J|_k \cdot (\underline{R} \cdot \underline{n})_{jk}}{C R_{jk}^2}$$

$R_{jk}$  é a distância entre o nó  $J$  (fonte) e um ponto do domínio (campo) do elemento  $K$ , isto é:

$$R_{jk} = |\underline{s}_j - \underline{q}_k|$$

Devemos notar que os coeficientes  $\alpha_{jk}$ ,  $\beta_{jk}$  e  $\gamma_{jk}$  dependem da posição relativa entre o nó  $J$  e o elemento  $K$ , os quais são função das coordenadas adimensionais  $\zeta$  e  $\eta$  do próprio elemento  $K$ , assim pode-se aplicar integração numérica para as integrais em (4.2.1.5) por quadratura gaussiana. É possível para os termos que contêm o coeficiente  $\alpha_{jk}$  integrar analiticamente com singularidade do tipo  $1/R$  em certos casos especiais.

Mais ainda temos que discretizar o tempo, o qual será feito a seguir.

#### 4.2.2 - Discretização do Tempo

Para proceder à discretização do tempo adotaremos o intervalo  $\Delta t$  como unidade de avanço, seu valor vai depender de diversos fatores que influenciam a qualidade dos resultados numéricos.

Para discretizar o pseudo-tempo  $\tau_r$ , que é o tem

po retardado, função do tempo e espaço simultaneamente e levando em conta que em geral este tempo não será um múltiplo exato do intervalo  $\Delta t$  o qual é considerado que não varia durante o processo, teremos,

$$tr = t - R/C$$

onde  $R = |\underline{S} - \underline{Q}|$  e  $t = m\Delta t$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

O valor de  $tr$  pode ser decomposto em uma parte inteira e uma parte fracionária, isto é:

$$tr = m\Delta t - (n + \mu) \Delta t \quad (4.2.2.1)$$

onde  $n =$  parte inteira de  $R/C\Delta t$  e  $\mu = R/C\Delta t - n$ , parte fracionária de  $R/C\Delta t - n$ ;  $\mu$  varia portanto entre 0 e 1 (Figura 4.2.2.1).

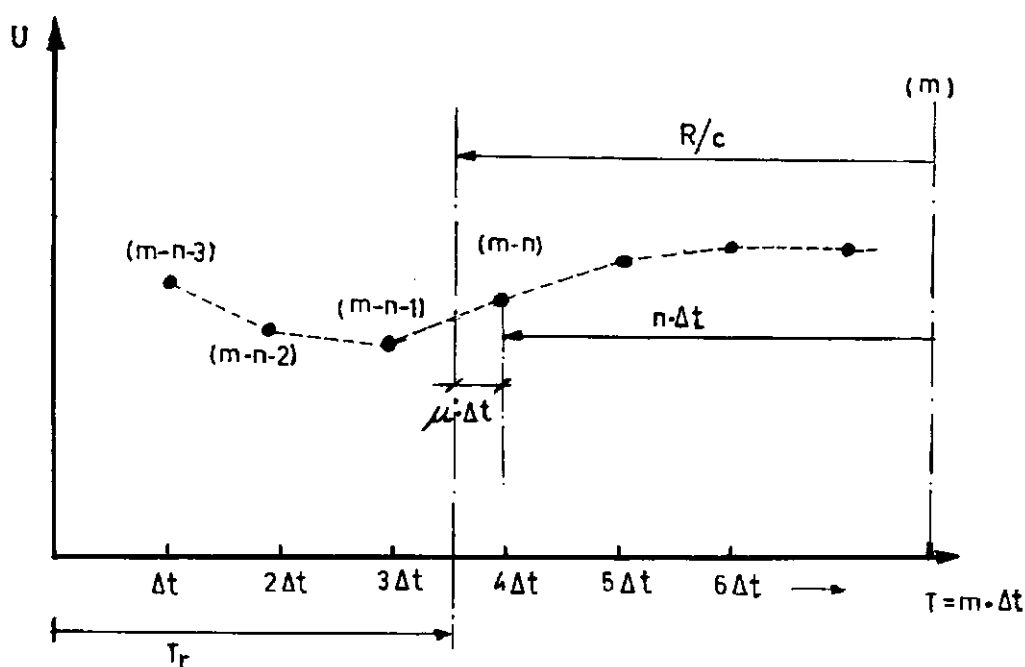


Figura 4.2.2.1 - Definição dos Valores de  $n$  e  $\mu$ .  
Esquema do Tempo Retardado e Posições Nodais.



Para aproximar linearmente  $u$ ,  $p$ ,  $\dot{u}$  dentro do intervalo  $\Delta t$ , usamos as funções de interpolações lineares

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\mu) &= 1 - \mu \\ \varepsilon_2(\mu) &= \mu\end{aligned}\tag{4.2.2.2}$$

Então, adotando o superíndice para indicar a posição do índice nodal no tempo, temos:

$$\begin{aligned}u_J(t) &= u_J^m \\ u_k(tr) &= \varepsilon_1 u_k^{(m-n)} + \varepsilon_2 u_k^{(m-n-1)} = \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r u_k^{(m-n-r+1)} \\ p_k(tr) &= \varepsilon_1 p_k^{(m-n)} + \varepsilon_2 p_k^{(m-n-1)} = \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r p_k^{(m-n-r+1)} \\ \dot{u}_k(tr) &= \varepsilon_1 \dot{u}_k^{(m-n)} + \varepsilon_2 \dot{u}_k^{(m-n-1)} = \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r \dot{u}_k^{(m-n-r+1)}\end{aligned}\tag{4.2.2.3}$$

Notemos ainda que o anterior pode generalizar-se para aproximações de ordem superior, quadráticas, etc, aumentando por conseguinte o número de posições nodais ou nós no tempo dentro do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

#### 4.3 - DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA PARA $\dot{u}$

Para obter  $\dot{u}_k^{(T)}$  numericamente empregaremos a fórmula de diferenças atrasadas de Newton, (34)

$$\dot{u}^{(T)} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \sum_{f=0}^F C_f u^{(T-f)} \right\} \quad \text{com} \quad \sum_{f=0}^F C_f = 0\tag{4.3.1}$$

ficando assim  $\dot{u}^{(T)}$  em termos de valores de  $u$  em tempos anteriores e do mesmo instante  $T$ . Exploraremos neste trabalho duas possibilidades:

## i) Três pontos

Neste caso tem-se

$$\begin{aligned}
 F &= 2 \\
 C_0 &= 3/2 \\
 C_1 &= -2 \\
 C_2 &= 1/2
 \end{aligned}
 \tag{4.3.2}$$

## ii) Dois pontos

$$\begin{aligned}
 F &= 1 \\
 C_0 &= 1 \\
 C_1 &= -1
 \end{aligned}
 \tag{4.3.3}$$

Portanto podemos escrever agora  $\dot{u}_k(tr)$ , usando (4.3.1) e a terceira de (4.2.2.3)

$$\dot{u}_k(tr) = \sum_{r=1}^2 \epsilon_r \dot{u}_k^{(m-n-r+1)} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{r=1}^2 \sum_{f=0}^F \epsilon_r \cdot C_f \cdot u_k^{(m-n-r+1-f)}
 \tag{4.3.4}$$

## 4.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DISCRETIZADA

A equação (4.2.1.5) com a discretização do tempo e a fórmula de diferenciação numérica apresentada pode ser escrita da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 4\pi C(s_j) u_j^m &= \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{R=2} \int_{\Gamma_k} \alpha_{jk}(\zeta, \eta) \epsilon_r(\mu) p_k^{(m-n-r+1)} d\eta d\zeta + \\
 &\quad \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{R=2} \int_{\Gamma_k} \beta_{jk}(\zeta, \eta) \epsilon_r(\mu) u_k^{(m-n-r+1)} d\eta d\zeta + \\
 &\quad \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{R=2} \sum_{f=0}^F \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_k} \gamma_{jk}(\zeta, \eta) \epsilon_r(\mu) u_k^{(m-n-r+1-f)} d\eta d\zeta + \frac{f(trs)}{R_S}
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

com  $j = 1, 2, 3 \dots N$

Ao compararmos a equação anterior com a equação integral de contorno para problemas de potencial governados pela equação de Laplace ou Poisson, podemos notar que o primeiro somatório da equação (4.4.1) fornece a matriz  $\underline{G}$  e o segundo somatório fornece a matriz  $\underline{H}$ , denominação usual no M.E.C., assim o terceiro triplo somatório é a contribuição do termo  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  da equação de onda e o quarto termo é o termo inhomogêneo. O comentado anteriormente porém deve ser tomado unicamente num sentido formal, porque a matriz  $\underline{H}$  resultante final na equação (4.4.1) está formada pelas contribuições do segundo e terceiro somatórios da própria equação;  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  nesta formulação não são cheias em geral, podendo até serem matrizes diagonais.

Ao integrarmos numericamente por quadratura gaussiana as integrais definidas na equação (4.4.1) e efetuar o desenvolvimento dos somatórios em relação a  $f$  e  $r$  os índices superiores resultantes nas variáveis  $u$  e  $p$  podem-se escrever na forma:

$$(m - i) \quad (4.4.2)$$

onde  $m$  é o índice que indica o atual "time-step" e o índice  $i$  é a soma das contribuições dos índices  $n$ ,  $r$  e  $f$ . Notemos que como  $\Delta t$  é constante os valores assumidos pelo índice  $i$  resultam ser independentes da marcha no tempo. Os coeficientes resultantes para  $u$  e  $p$  devido ao processo anterior podem ser associados a este índice  $i$  e assim podemos escrever:

$$\begin{aligned}
4\pi C(s_j) u_j^m = & \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_1} G_{jk}^{(i)} p_k^{(m-i)} + \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_2} H_{jk}^{(i)} \cdot u_k^{(m-i)} + \frac{f(\text{trs})}{R_S}
\end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$j = 1, 2, 3 \dots N$$

$$R_S = |S_J - Q_S| \quad \text{e} \quad \text{trs} = m\Delta t - R_S/C$$

Observemos que a variável  $i$  tem um valor mínimo  $I_0$  devido ao valor de  $n$  mínimo, isto é, o que corresponde à menor distância entre o nó  $j$  e o ponto de integração mais perto de  $j$ ; lembrando (4.2.2.1) temos.

$$n_{\text{mín}} = \frac{(R_{jk})_{\text{mín}}}{C \cdot \Delta t} \quad (\text{parte inteira})$$

Logo  $I_0 = n_{\text{mín}}$  que acontece quando  $r = 1$  e  $f = 0$ , devendo-se observar que o valor menor possível de  $n$  encontrando para  $I_0$  é igual a zero.

Da mesma forma a variável  $i$  tem dois máximos,  $I_1$  para os coeficientes  $p_k^{(m-i)}$  e outro  $I_2$  para os coeficientes de  $u_k^{(m-i)}$  ponto que existe um somatório a mais em relação ao índice  $f$  no terceiro termo de (4.4.1)

Então, sendo

$$n_{\text{máx}} = \frac{(R_{jk})_{\text{máx}}}{C \Delta t} \quad (\text{parte inteira})$$

temos:

$$I_2 = n_{\text{máx}} + R + F - 1$$

(4.4.4)

$$\text{e} \quad I_1 = n_{\text{máx}} + R - 1$$

quando  $n = n_{\text{máx}}$ ,  $r = R = 2$  e  $f = F$

#### 4.5 - FORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Quando nós queremos achar as incógnitas no contorno empregaremos a equação (4.4.3) com  $C(s_j) = 1/2$ , neste caso temos:

$$2\pi u_j^m = \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_2} H_{jk}^{(i)} u_k^{(m-i)} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_1} G_{jk}^{(i)} p_k^{(m-i)} + \frac{f(\text{trs})}{R_S} \quad (4.5.1)$$

$$j = 1, 2, 3 \dots N$$

$$\text{trs} = m\Delta t - R_S/C$$

Em forma matricial e separando as incógnitas relativas ao último intervalo de tempo  $m$ , (as variáveis  $u$  e  $p$  para valores anteriores ao "time-step"  $m$  são conhecidos), temos:

$$\underline{\tilde{H}}^{(0)} \underline{\tilde{U}}^{(m)} = \underline{\tilde{G}}^{(0)} \underline{\tilde{P}}^{(m)} + \sum_{i=1}^{I_2} \underline{\tilde{H}}^{(i)} \underline{\tilde{U}}^{(m-i)} + \sum_{i=1}^{I_1} \underline{\tilde{G}}^{(i)} \underline{\tilde{P}}^{(m-i)} + \underline{\tilde{S}} \quad (4.5.2)$$

Usando as condições de contorno tipo Dirichlet, Newman ou Cauchy (mistas) para o problema, e deixando no lado esquerdo as incógnitas do contorno obtemos

$$\underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{X}} = \underline{\tilde{C}} + \sum_{i=1}^{I_2} \underline{\tilde{H}}^{(i)} \underline{\tilde{U}}^{(m-i)} + \sum_{i=1}^{I_1} \underline{\tilde{G}}^{(i)} \underline{\tilde{P}}^{(m-i)} + \underline{\tilde{S}} \quad (4.5.3)$$

onde  $\underline{\tilde{C}}$ , vetor de constantes dado pelo produto dos coeficientes  $\underline{\tilde{H}}^{(0)}$  e  $\underline{\tilde{G}}^{(0)}$  por seus correspondentes valores prescritos no contorno.

A matriz  $\underline{\tilde{A}}$ , matriz é composta de coeficientes do tipo  $\underline{\tilde{H}}_{jk}^{(0)}$  e  $\underline{\tilde{G}}_{jk}^{(0)}$  em forma adequada, para as incógnitas do

contorno,

$\underline{\tilde{X}}$  vetor das incógnitas do contorno

$\underline{\tilde{S}}$  vetor de constantes pela contribuição da fonte  $f(\text{trs})/R_S$

Se efetuarmos os produtos matriciais

$$\underline{\tilde{H}}^{(i)} \underline{\tilde{u}}^{(m-i)} \quad \text{e} \quad \underline{\tilde{G}}^{(i)} \underline{\tilde{p}}^{(m-i)}$$

obtemos

$$\underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{X}} = \underline{\tilde{C}} + \underline{\tilde{H}}_0 + \underline{\tilde{G}}_0 + \underline{\tilde{S}} \quad (4.5.4)$$

onde

$$\underline{\tilde{G}}_0 = \sum_{i=1}^{I_1} \underline{\tilde{G}}^{(i)} \underline{\tilde{p}}^{(m-i)}$$

$$\underline{\tilde{H}}_0 = \sum_{i=1}^{I_2} \underline{\tilde{H}}^{(i)} \underline{\tilde{u}}^{(m-i)}$$

Em  $\underline{\tilde{G}}_0$  e  $\underline{\tilde{H}}_0$  estarão contidos os valores numéricos devido às condições iniciais quando  $(m-i)$  for igual a zero.

Somando os vetores de constantes tem-se

$$\underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{X}} = \underline{\tilde{B}} \quad (4.5.5)$$

sendo

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{\tilde{C}} + \underline{\tilde{H}}_0 + \underline{\tilde{G}}_0 + \underline{\tilde{S}}$$

Equação (4.5.5) é um sistema de equações algébricas que fornecerá portanto após ser resolvido o valor das incógnitas no contorno, para o valor do tempo final do intervalo de tempo considerado.

## 4.6 - SOLUÇÃO EM PONTOS INTERNOS

Quando os valores de  $u$  e  $p$  são conhecidos no contorno pela aplicação da equação matricial (4.5.5), valores de potencial dentro do domínio podem ser determinados usando (4.4.3) com  $C(s_j) = 1$ . Neste caso obtemos:

$$4\pi u_j^m = \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_1} G_{jk}^{(i)} p_k^{(m-i)} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_2} H_{jk}^{(i)} u_k^{(m-i)} + \frac{f(\text{trs})}{R_S} \quad (4.6.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, NPI$$

onde  $j$  é o índice para enumerar os pontos internos. Portanto o potencial  $u$  no ponto interno  $j$  e no instante  $t = m\Delta t$  é dado por:

$$u_j^m = \frac{1}{4\pi} \left( G_1 + H_1 + S \right) \quad (4.6.2)$$

onde

$$G_1 = \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_1} G_{jk}^{(i)} p_k^{(m-i)} \quad (4.6.3)$$

$$H_1 = \sum_{k=1}^N \sum_{i=I_0}^{I_2} H_{jk}^{(i)} u_k^{(m-i)}$$

Devemos notar que  $H_{jk}^{(i)}$  e  $G_{jk}^{(i)}$  são diferentes aos da equação (4.5.1) posto que agora o índice  $j$  se refere a pontos internos.

## CAPÍTULO V - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS TRANSIENTES TRIDIMENSIONAIS

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Desenvolveremos neste capítulo expressões para os coeficientes da equação (4.5.1), com aproximação linear no tempo para  $u$ ,  $p$  e  $\dot{u}$ , mantendo a aproximação constante no espaço para  $u$  e  $p$ . Para a diferenciação numérica empregaremos a fórmula de Newton (4.3.1) de diferenças atrasadas em três pontos.

Obtêm-se também o valor analítico dos coeficientes de  $p$  para certas situações especiais.

### 5.2 - ELEMENTOS PARA DISCRETIZAR O CONTORNO

Empregaremos elementos quadriláteros para modelar o contorno. Elementos triangulares [35] ou qualquer outro elemento plano empregado no método dos elementos finitos podem ser usados para tal fim. Nossos elementos são constantes e a geometria do corpo discretizado tem semelhança com aqueles modelados com elementos tipo flat no método dos elementos finitos (Figura 5.2.1). O elemento fica representado por um nó  $K$  por exemplo no centróide do quadrilátero.

De (4.2.1.1) temos que as variáveis  $u$ ,  $p$  e  $\dot{u}$  ficam aproximadas no elemento  $K$  por:

$$\begin{aligned} u(q, t) &= u_k(t) \\ p(q, t) &= p_k(t) \\ \dot{u}(q, t) &= \dot{u}_k(t) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$



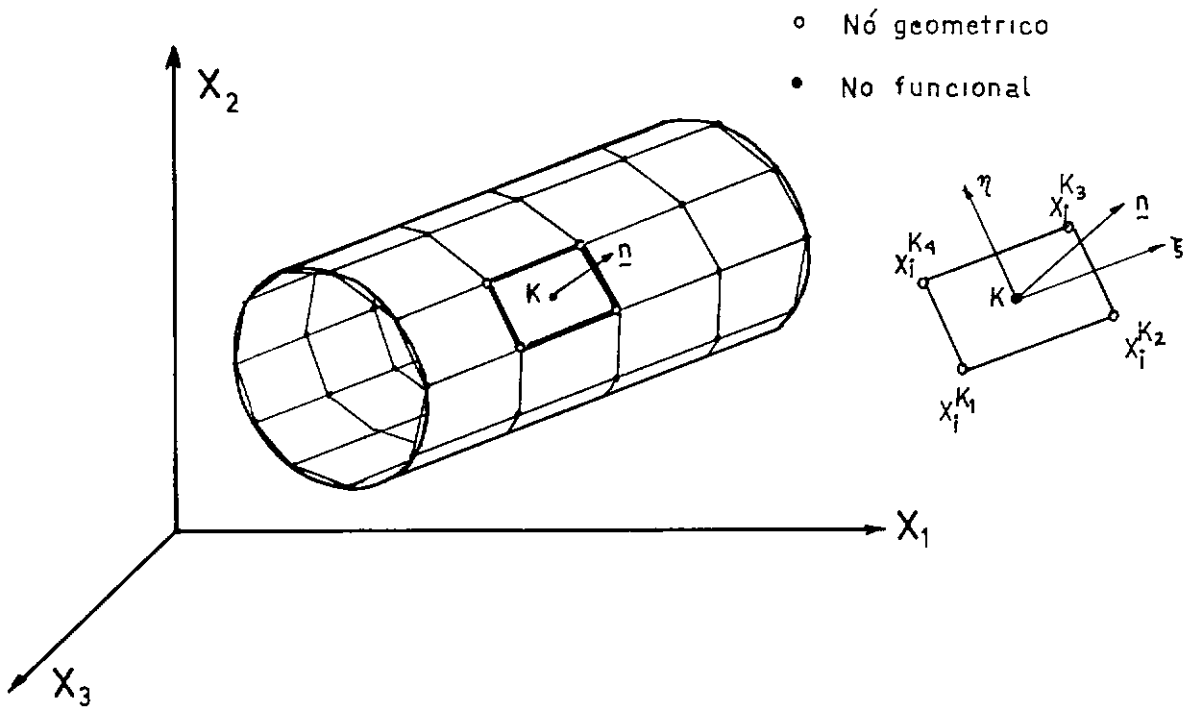


Figura 5.2.1 - Corpo Discretizado em Elementos Quadrilaterais

### 5.3 - DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

#### i) Discretização

Como já dissemos na seção (4.2.2.2) aproximaremos a variação de  $u$ ,  $p$  e  $\dot{u}$  dentro do intervalo  $\Delta t$  de forma linear e usando (4.2.2.1), temos:

$$\begin{aligned}
 u(q, tr) &= u_k(tr) = \epsilon_1 u_k^{(m-n)} + \epsilon_2 u_k^{(m-n-1)} \\
 p(q, tr) &= p_k(tr) = \epsilon_1 p_k^{(m-n)} + \epsilon_2 p_k^{(m-n-1)} \\
 \dot{u}(q, tr) &= \dot{u}_k(tr) = \epsilon_1 \dot{u}_k^{(m-n)} + \epsilon_2 \dot{u}_k^{(m-n-1)}
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

onde

$$tr = t - R/C$$

ou de forma discreta

$$tr = m\Delta t - (n + \mu)\Delta t$$

$\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são funções de interpolações lineares em  $\mu$  conforme mostrado na Figura (5.3.1), dados por

$$\varepsilon_1 = 1 - \mu$$

(5.3.2)

$$\varepsilon_2 = \mu$$

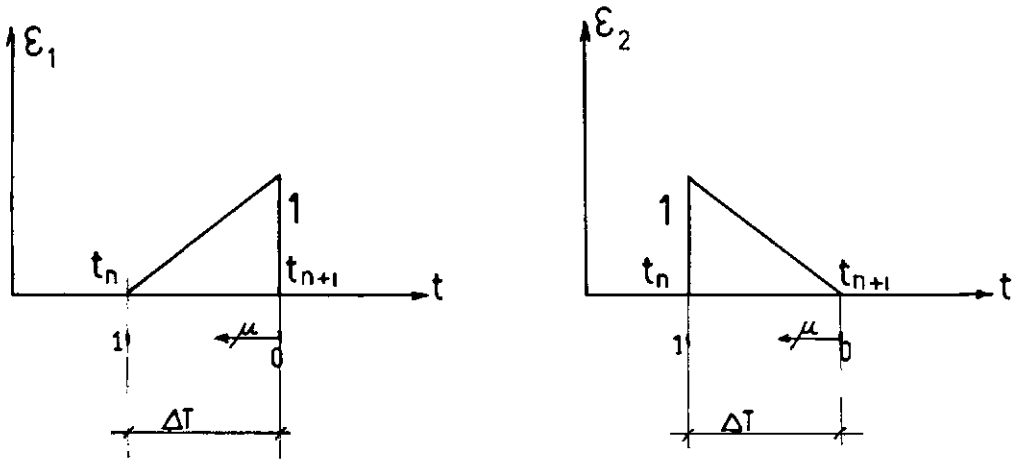


Figura 5.3.1 - Funções de Interpolação Lineares no Tempo

### ii) Avanço no Tempo

A forma de avanço no tempo é através dos saltos discretos de tempo  $\Delta t$ . Por cada salto de tempo  $\Delta t$  a onda avança uma distância igual ao produto da velocidade de propagação  $C$  por  $\Delta t$ . Devido ao princípio da causalidade e os tipos de aproximações no tempo empregadas existirá interação entre dois elementos quaisquer desde que pelo menos a distância de uma sub-região de um deles em relação ao nó central do outro seja menor que a distância percorrida pela onda até esse instante (Figura 5.3.2).

O comentário obviamente deve-se à própria natureza do fenômeno de propagação; assim numericamente fica refletido em que somente existirão coeficientes diferentes de zero na matriz  $\underline{A}$  (4.5.4) das incógnitas (equação 4.5.4),

para as variáveis que ficam afetadas mutuamente pelo avanço da onda no primeiro intervalo de tempo  $\Delta t$  ( $m = 1$ ).

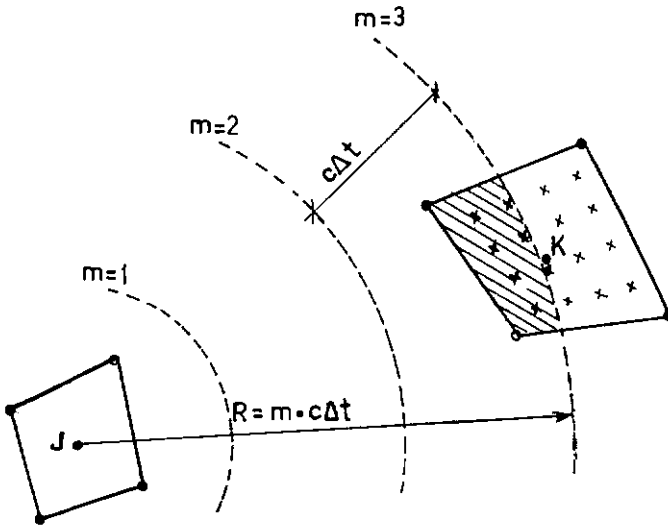


Figura 5.3.2 - Propagação da Onda a partir do Elemento J e a sua Interação com o Elemento K.

Notemos na Figura 5.3.2 que para  $m = 3$  a perturbação somente abrange uma região que contém 6 pontos de integração para os quais o valor de  $n$  é igual a 2, os restantes 10 pontos tem um valor de  $n = 3$  (unidades inteiras da distância  $C \Delta t$ ).

## 5.4 - DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Empregando a fórmula de Newton (4.3.1) com três pontos atrasados para  $\dot{u}_k(tr)$  em (5.3.1), teremos:

$$\begin{aligned} \dot{u}_k(tr) = & \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} \left[ C_0 u_k^{(m-n)} - C_1 u_k^{(m-n-1)} + C_2 u_k^{(m-n-2)} \right] + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{\Delta t} \left[ C_0 u_k^{(m-n-1)} - C_1 u_k^{(m-n-2)} + C_2 u_k^{(m-n-3)} \right] \end{aligned}$$

Somando,

$$\begin{aligned} \dot{u}_k(tr) = & \frac{1}{\Delta t} \left\{ C_0 \varepsilon_1 u_k^{(m-n)} + (C_0 \varepsilon_2 - C_1 \varepsilon_1) u_k^{(m-n-1)} + \right. \\ & \left. + (C_2 \varepsilon_1 - C_1 \varepsilon_2) u_k^{(m-n-2)} + C_2 \varepsilon_2 u_k^{(m-n-3)} \right\} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{u}_k(tr) = & \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1,5(1 - \mu) u_k^{(m-n)} + (3,5 \mu - 2) u_k^{(m-n-1)} + \right. \\ & \left. + (0,5 - 2,5 \mu) u_k^{(m-n-2)} + 0,5 \mu u_k^{(m-n-3)} \right\} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

## 5.5 - EQUAÇÃO INTEGRAL DISCRETIZADA. COEFICIENTES

Ao discretizar o contorno em  $N$  elementos quadriláteros e utilizando as aproximações definidas (5.2.1), (5.3.1) e (5.4.2), temos a seguinte expressão para a equação integral aplicada ao contorno em cada nó  $j$  no centro de cada elemento.

$$\begin{aligned}
2\pi u_j^m = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \left\{ \frac{(1-\mu) p_k^{(m-n)} + \mu p_k^{(m-n-1)}}{R} \right\} dS + \\
& + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{R \cdot \underline{n}}{R^3} \left\{ (1-\mu) u_k^{(m-n)} + \mu u_k^{(m-n-1)} \right\} dS + \\
& + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{R \cdot \underline{n}}{CR^2 \Delta t} \left\{ 1,5(1-\mu) u_k^{(m-n)} + (3,5 \mu - 2) u_k^{(m-n-1)} + \right. \\
& + (0,5 - 2,5 \mu) u_k^{(m-n-2)} + 0,5 \mu u_k^{(m-n-3)} \left. \right\} dS + \\
& + \frac{f(\text{tr})}{R_S} \quad \text{com } j = 1, 2, 3 \dots N \quad (5.5.1)
\end{aligned}$$

Quando  $j = k$  a equação (5.5.1) contém expressões integrais as quais devem ser integradas no sentido principal de Cauchy por causa das singularidades do tipo  $1/R$  e  $1/R^2$ , embora quando é usada discretização linear o problema é contornado devido à ortogonalidade de  $\Gamma_k$  e  $\underline{n}$ , isto é  $R \cdot \underline{n} = 0$  nas integrais segunda e terceira de (5.5.1), porém o comentário anterior não é válido para discretização de ordem superior (quadrática, cúbica, etc.). A da primeira integral em (5.5.1) com a singularidade do tipo  $1/R$  pode em certos casos ser integrada analiticamente.

Se as integrais no domínio  $\Gamma_k$  indicadas em (5.5.1) são efetuadas numericamente por quadratura gaussiana [7] com NP pontos de integração podemos escrever.

$$\begin{aligned}
2\pi u_j^{(m)} = & \sum_{k=1}^N \sum_{g=1}^{NP} \left\{ G_{1jk}^{(n)} P_k^{(m-n)} + G_{2jk}^{(n+1)} P_k^{(m-n-1)} + \right. \\
& + H_{1jk}^{(n)} u_k^{(m-n)} + H_{2jk}^{(n+1)} u_k^{(m-n-1)} + \\
& \left. + H_{3jk}^{(n+2)} u_k^{(m-n-2)} + H_{4jk}^{(n+3)} u_k^{(m-n-3)} \right\}_g + \\
& + \frac{f(\text{trs})}{R_S} \quad \text{com } j = 1, 2, 3 \dots N
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

onde (índice  $g$  suprimido)

$$\begin{aligned}
G_{1jk}^{(n)} &= \frac{|J| W}{R} (1 - \mu) \\
G_{2jk}^{(n+1)} &= \frac{|J| W}{R} \mu \\
H_{1jk}^{(n)} &= \frac{\tilde{R} \cdot \tilde{n}}{R^2} |J| W \cdot \left( \frac{1 - \mu}{R} + \frac{1,5(1 - \mu)}{C \Delta t} \right) \\
H_{2jk}^{(n+1)} &= \frac{\tilde{R} \cdot \tilde{n}}{R^2} |J| W \cdot \left( \frac{\mu}{R} + \frac{3,5 \mu - 2}{C \Delta t} \right) \\
H_{3jk}^{(n+2)} &= \frac{\tilde{R} \cdot \tilde{n}}{R^2} |J| W \cdot \left( \frac{0,5 - 2,5 \mu}{C \Delta t} \right) \\
H_{4jk}^{(n+3)} &= \frac{\tilde{R} \cdot \tilde{n}}{R^2} |J| W \cdot \left( \frac{0,5 \mu}{C \Delta t} \right)
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

$|J|$ ,  $\tilde{e}$  o jacobiano do elemento  $K$  definido em (4.2.1.3),  $R$  no denominador  $\tilde{e}$  a distância entre o nó  $j$  e um ponto de integração  $g$  no elemento  $K$ , enquanto  $\tilde{R}$  no numerador  $\tilde{e}$  o vetor de posição com origem em  $j$  e extremidade no ponto de integração  $g$  do

elemento  $K$ , por outra parte  $\underline{n}$  é o vetor unitário normal à superfície do elemento  $\Gamma_k$ .

O fator peso  $W$  para integrar o domínio em duas dimensões é o produto dos fatores peso para cada uma das coordenadas adimensionais  $\zeta$  e  $\eta$ .

Por cada ponto de integração tem-se um valor específico de  $|J|$ ,  $W$ ,  $R$  e  $n, \mu$ , conseqüentemente existirá um número de NP coeficientes  $H_1, H_2, H_3, H_4, G_1$  e  $G_2$  para um determinado nó  $j$  e um elemento  $K$ .

Notemos que devido à propriedade de translação no tempo os coeficientes anteriores são calculados somente uma vez, toda vez que já não dependam das condições iniciais. Cada coeficiente está associado com um único valor de  $n$  (4.2.2.1) (parte inteira da distância  $R$  em unidade de  $C \Delta t$ ), conseqüentemente destes NP valores de  $n$  existirá um mínimo e um máximo, decorrente da distância mínima ou máxima do nó  $j$  ao ponto de integração mais perto ou mais afastado; sendo assim, podemos reordenar e somar coeficientes em relação a  $n$ , não sendo necessário armazenar coeficientes em função de cada ponto de integração dando NP coeficientes  $H_1, H_2, \dots, G_1$  e  $G_2$ , senão uma quantidade igual à diferença do valor de  $n$  máximo com  $n$  mínimo. Isto forma parte dos algoritmos implementados no programa computacional, com o objetivo de diminuir posições de memória.

Um dos fatores mais importante é a escolha do valor de  $\Delta t$ , por enquanto sem analisar suas conseqüências nos resultados numéricos, podemos observar que se seu valor é grande, então o produto  $C \Delta t$  também o será e conseqüentemente pode

acontecer que o valor de  $n = R/C \Delta t$  (parte inteira), seja nulo, isto significa que as matrizes  $H$  e  $G$  serão totalmente cheias, devido ao princípio de causalidade, o tempo retardado entre qualquer par de nós é positivo.

Se em contraposição o valor de  $\Delta t$  fosse pequeno de tal forma que o produto  $C \Delta t$  não seja maior que o menor tamanho do menor elemento mais pequeno da discretização, teremos que as matrizes  $H$  e  $G$  seriam somente diagonais, qualquer coeficiente fora da diagonal é nulo. Isto acontece novamente em virtude do princípio da causalidade porque o tempo retardado só é positivo quando trata-se do mesmo elemento no primeiro intervalo de tempo, qualquer outro valor do tempo retardado para elementos diferentes será negativo e conseqüentemente a solução fundamental é nula. Esta característica permite que não precisemos inverter matrizes para solucionar o sistema de equações bastando somente efetuar divisões. Nossa implementação computacional permite ambas possibilidades e casos intermediários.

Outras expressões para os coeficientes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $G_1$  e  $G_2$  para diferentes aproximações são obtidas em 5.6.

## 5.6 - COMBINAÇÃO DE APROXIMAÇÕES. COEFICIENTES

Depois do estudo numérico das soluções cujas conclusões estão contidas no capítulo VII e VIII as combinações de melhor comportamento nas soluções foram:



ESQUEMA	VARIÁVEL	APROXIMAÇÃO NO ESPAÇO	APROXIMAÇÃO NO TEMPO	Nº DE PONTOS PARA DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA
1	u	constante	linear	-
	p	constante	linear	-
	$\dot{u}$	constante	linear	três pontos
2	u	constante	linear	-
	p	constante	linear	-
	$\dot{u}$	constante	constante	dois pontos
3	u	constante	linear	-
	p	constante	constante	-
	$\dot{u}$	constante	linear	três pontos
4	u	constante	linear	-
	p	constante	constante	-
	$\dot{u}$	constante	constante	dois pontos

Para o esquema 1 os coeficientes são as expressões dadas em (5.5.3). No esquema 3 os coeficientes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  e  $H_4$  são os mesmos pontos que as aproximações são iguais, só mudam os coeficientes  $G_1$  e  $G_2$  dados por

$$G_1^{(n)} = \frac{|J|}{R} w \quad (5.6.1)$$

$$G_2^{(n+1)} = 0$$

Estes coeficientes podem ser obtidos das expressões (5.5.3) adotando-se  $\mu = 0$ .

Para o esquema 2 e 4 obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 H_{1jk}^{(n)} &= \frac{R \cdot \hat{n}}{R^2} |J| W \left\{ \frac{(1 - \mu)}{R} + \frac{1}{C \Delta t} \right\} \\
 H_{2jk}^{(n+1)} &= \frac{R \cdot \hat{n}}{R^2} |J| W \left\{ \frac{\mu}{R} + \frac{1}{C \Delta t} \right\} \\
 H_{3jk}^{(n+2)} &= 0 \\
 H_{4jk}^{(n+3)} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

$G_1$  e  $G_2$  estão dados por (5.5.3) para o esquema 2 e (5.6.1) para o esquema 4. Os coeficientes  $H_3$  e  $H_4$  são nulos devido ao fato que a fórmula de diferenciação numérica só precisa de dois pontos neste caso e além do mais  $\dot{u}$  é constante.

Em todos os esquemas apresentados os coeficientes numericamente a exceção dos valores para  $G_1$  e  $G_2$  indicados na seção 5.7.

Como dissemos antes, estes coeficientes vão sendo calculados por cada ponto de integração o qual gera uma grande quantidade de coeficientes, a reordenação e soma final de todos eles será feita em relação a  $n$ , o qual permite determinar o valor do  $n$  por subregiões do elemento  $K$  e não em seus pontos de integração, o número de tais subregiões com diferentes valores de  $n$  resulte portanto ser igual à diferença entre  $n$  máximo e  $n$  mínimo.

Este esquema está presente na SUBROTINA INSTEP no anexo. Podemos ainda afirmar que esta diferença n máximo - n mínimo para um determinado nó fonte e elemento K equivale ao número de intervalos de tempo necessários a partir do nó fonte para que a onda cruze totalmente o elemento K, o qual pela sua vez depende da escolha do valor do incremento de tempo  $\Delta t$  e da velocidade de propagação da onda. Portanto quando o produto da velocidade da onda por o incremento de tempo  $\Delta t$  é constante para diferentes valores de C e  $\Delta t$ , o fenômeno é o mesmo e consequentemente os resultados numéricos são iguais.

#### 5.7 - VALORES ANALÍTICOS DE $G_1$ e $G_2$

As integrais presentes em (5.5.1)

$$\int_{\Gamma_k} \frac{(1 - \mu)}{R} p_k^{(m-n)} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\mu}{R} p_k^{(m-n-1)} d\Gamma$$

Sendo  $\mu = R/C \Delta t - n$  definido na seção (4.2.2) serão calculadas analiticamente quando  $j = k$ , isto é, para coeficientes da diagonal de G na primeiro intervalo de tempo nos seguintes dois casos:

i ) Quando  $C \Delta t$  é menor que a menor dimensão de qualquer elemento (Figura 5.7.1).

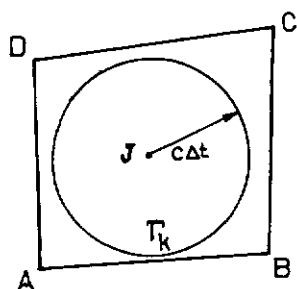


Figura 5.7.1 - Elemento Quadrilateral com a Onda Confinada no Elemento.

Neste caso o valor de  $G_1$  e  $G_2$  para o primeiro intervalo de tempo ( $m = 1$ ), vale:

$$G_{1jk}^{(0)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{(1 - \mu)}{R} R d\theta dR = \pi C \Delta t \quad (5.7.1)$$

$$G_{2jk}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{\mu}{R} R d\theta dR = \pi C \Delta t$$

onde  $R d\theta dR = d\Gamma$ .

Notemos que  $\Gamma_k$ , é a área da circunferência de raio  $C \Delta t$  e  $\mu = \frac{R}{C \Delta t}$ , posto que  $n = 0$  para a região  $\Gamma_k$ .

Ao usar uma aproximação constante para  $p$ , os coeficientes são obtidos sob as mesmas condições anteriores.

$$G_{1jk}^{(0)} = 2\pi C \Delta t$$

(5.7.2)

$$G_{2jk}^{(1)} = 0$$

ii) Quando  $C \Delta t$  é maior a qualquer dimensão do maior elemento da discretização (Figura 5.7.2).

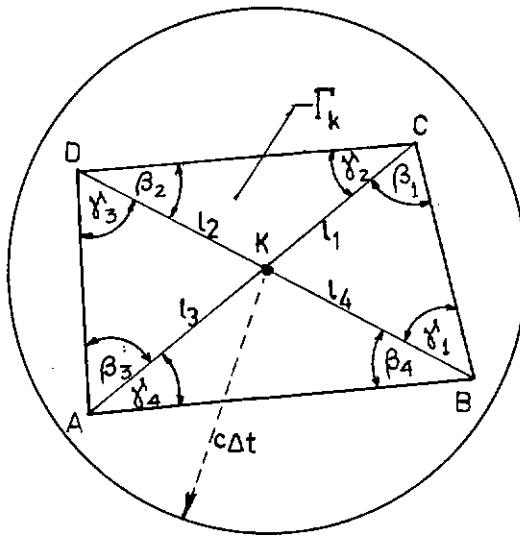


Figura 5.7.2 - Onda Propagando uma Distância  $C\Delta t$  maior que qualquer Dimensão do Elemento Quadrilateral.

Para  $G_1$  e  $G_2$ , com aproximação linear para  $p$  tem-se [37]:

$$G_{1jk}^{(0)} = \sum_{i=1}^4 l_i \sin \beta_i \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\left( \tan \beta_i / 2 * \tan \gamma_i / 2 \right)} \right) - \frac{A_k}{C \Delta t} \quad (5.7.3)$$

$$G_{2jk}^{(1)} = \frac{A_k}{C \Delta t}$$

onde os ângulos  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  e a longitudinalidade  $l_j$  estão definidos na Figura (5.7.2).

$A_k$  é a área do elemento quadrilátero,  $C$  a velocidade de propagação de onda.

No caso de aproximação constante para  $p$ , tem-se:

$$G_{1jk}^{(0)} = \sum_{i=1}^4 \ell_i \sin \beta_i \frac{1}{n} \left( 1 / (\operatorname{tg} \beta_i / 2 * \operatorname{tg} \gamma_i / 2) \right) \quad (5.7.4)$$

$$G_{2jk}^{(1)} = 0$$

Se para o primeiro intervalo de tempo ( $m = 1$ ), a circunferência de raio  $C \Delta t$  interceptar os lados do elemento quadrilateral, a integração analítica torna-se mais difícil de ser feita porque o domínio  $\Gamma_k$  é irregular e deve ser definido considerando os pontos de intersecção da circunferência com os lados do elemento (Figura 5.7.3). Esta possibilidade não foi implementada no programa computacional, e quando esta situação ocorre a integração é feita numericamente.

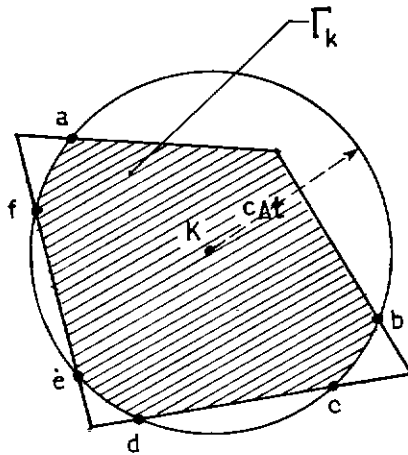


Figura 5.7.3 - Domínio  $\Gamma_k$  no Caso Geral e Pontos de Intersecção.

## 5.8 - CONSIDERAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Como já foi dito somente condições iniciais no contorno são consideradas, as condições então para a origem no tempo  $t = 0$ , são:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ p(x, 0) &= p_0 \quad x \in \Gamma \\ \dot{u}(x, 0) &= v_0 \end{aligned} \quad (5.8.1)$$

As condições iniciais relativas ao potencial  $u$  e a sua derivada normal  $p$ , fornecem valores constantes para a matriz de termos independentes  $\underline{H}_0$  e  $\underline{G}_0$  em (4.5.4) ao ser multiplicados por seus respectivos coeficientes em  $\underline{H}^{(i)}$  e  $\underline{G}^{(i)}$  quando  $(m - i)$  for igual a zero.

Consideração especial deve ser feita em relação ao uso da fórmula de diferenciação numérica pelo método de diferenças atrasadas de Newton.

Quando é usada a fórmula de três pontos, precisamos conhecer até dois intervalos de tempo anteriores aos valores do potencial, pois o último é relativo à incôgnita atual, portanto quando estamos iniciando o processo de marcha no tempo, isto é, estando no primeiro intervalo de tempo, somente temos dois pontos, portanto precisamos de um ponto a mais, o qual pode ser obtido em  $-\Delta t$ , aplicando a condição  $\dot{u}(x, 0) = v_0$  ao polinômio de segundo grau que vai sendo definido por três pontos (Anexo B). Assim para o primeiro intervalo de tempo obtém-se a seguinte expressão com somente dois pontos e a condição inicial  $\dot{u}(x, 0) = v_0$ .

$$\dot{u}^{(1)} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ 2 u^{(1)} - 2 u_0 - v_0 \Delta t \right\} \quad (5.8.2)$$

Agora, no caso de utilizar a fórmula de dois pontos, o procedimento anterior não é necessário pois neste caso:

$$\dot{u}^{(1)} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ u^{(1)} - u_0 \right\} \quad (5.8.3)$$

aproveitando a condição inicial  $u_0$  para avaliar  $\dot{u}^{(1)}$ .

Devemos notar que quando empregamos (5.8.2), o princípio de translação no tempo (3.4.5), característica da propagação de onda estudada é violada nos primeiros intervalos de tempo pois os coeficientes  $H_1, H_2, \dots, G_1$  e  $G_1$  (5.5.3) vão mudando em sua expressão algébrica segundo seja usada (5.8.2) ou a fórmula com três pontos (4.3.1), pela falta de pontos iniciais, até que o avanço no tempo tenha para qualquer elemento já três valores de potencial, a partir daí os coeficientes ficam constantes até o final da análise.

Uma alternativa para fórmulas de ordem superior que utilizem mais pontos para a determinação numérica de derivada (método de Houbolt [8]), é usar fórmula de três pontos para os primeiros intervalos de tempo até obter o número suficiente de valores para utilizar a fórmula diretamente, esta alternativa não foi implementada neste trabalho.



## CAPÍTULO VI - DESCRIÇÃO GERAL DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

### 6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreveremos de forma geral o programa feito em linguagem FORTRAN através das subrotinas mostradas num fluxograma, a rotina de maior interesse é listada no Anexo.

### 6.2 - DESCRIÇÃO GERAL

O programa implementado pode processar problemas tridimensionais transientes contendo até 100 elementos quadriláteros e 80 intervalos de tempo aproximadamente, valores que podem variar em função do tipo de problema desde que se utilize a mesma capacidade de memória, porém a limitação principal é o número de elementos. O número de pontos internos em que pode-se calcular o potencial é igual a 100. Utilizam-se dois arquivos em memória auxiliar para armazenar os coeficientes  $H_{jk}^{(i)}$  e  $G_{jk}^{(i)}$  (equação 4.5.1).

O programa foi desenvolvido em linguagem FORTRAN para o computador Burroughs 6800 do Núcleo de Computação Eletrônica da U.F.R.J.

### 6.3 - DESCRIÇÃO GERAL DAS ROTINAS

#### 6.3.1 - ROTINAS DADOS

Esta rotina permite a entrada de dados do problema em estudo. As variáveis necessárias para a análise com sua respectiva função são:

TÍTULO: Identificação do problema

N : Número de elementos de contorno

L : Número de pontos internos

C : Velocidade de propagação da onda

DT : Intervalo de tempo para a marcha no tempo

T MÁX : Tempo máximo para análise

NTYP : Tipo de análise 0: "onda confinada"

1: avanço de onda maior que qualquer tamanho de elemento no primeiro intervalo de tempo

2: qualquer outra possibilidade

NN : Número de nós que definem a geometria do problema

NPIN : Número de pontos de integração numérica a escolher para a análise

X, Y, Z : Vetores contendo as coordenadas dos nós

CX, CY, CZ : Vetores das coordenadas dos pontos internos

NDN : Matriz de conectividade dos elementos

CODE : Código das condições prescritas para o contorno:

0: u prescrito (potencial)

1: p prescrito (derivada normal)

FI : Matriz com os valores das condições de contorno prescritas no tempo que sejam diferentes de zero

$\underline{u}_0, \underline{v}_0, \underline{p}_0$  : Vetores contendo os valores das condições iniciais que sejam diferentes de zero,  $\underline{u}_0, \underline{v}_0$  e  $\underline{p}_0$  referem-se aos valores iniciais para potencial, velocidade e fluxo.

SFD : Vetor de valores de fonte potencial discreta no tempo.

### 6.3.2 - ROTINA FORM

Rotina que forma a equação matricial  $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$ . A matriz das incógnitas  $\underline{A}$ , é formada de coeficientes das matrizes  $\underline{H}^{(0)}$  e  $\underline{G}^{(0)}$  recoordenando convenientemente levando em conta o valor prescrito das variáveis no contorno (equação 4.5.3). O Vetor  $\underline{B}$  é formado pelos produtos dos valores conhecidos no contorno pelos coeficientes de  $\underline{H}^{(0)}$  e  $\underline{G}^{(0)}$  (vetor  $\underline{C}$  na equação (4.5.4), mais a soma dos produtos  $\underline{H}^{(i)} \cdot \underline{u}^{(m-i)}$  e  $\underline{G}^{(i)} \underline{p}^{(m-i)}$  (vetores  $\underline{H}_0$  e  $\underline{G}_0$  na equação (4.5.4)) correspondentes para potenciais e fluxos retardados. A rotina não calcula o valor das fontes concentradas o qual é feito pela rotina FONTE.

### 6.3.3 - ROTINA FONTE

Esta rotina calcula a contribuição de fonte concentrada, fornecendo os coeficientes do vetor  $\underline{S}$  na equação (4.5.4).

### 6.3.4 - ROTINA SLNPD

Resolve o sistema de equação lineares  $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$ , pelo método de eliminação de Gauss, calculando  $u$  e  $p$  no último intervalo de tempo.

### 6.3.5 - ROTINAS MULT E DIV

MULT rotina que calcula as incógnitas segundo a fórmula:

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \times \underline{B}$$

onde  $\underline{A}^{-1}$  foi determinada pela rotina MINV, que calcula a inversa da matriz  $\underline{A}$ .

DIV calcula as incógnitas como:

$$X_i = A_{ii}/B_i$$

quando a matriz  $A$  é diagonal.

#### 6.3.6 - ROTINA SOLUC

Rotina que guarda em forma matricial em função do tempo as soluções  $u$  e  $p$  resultados de SLNPD para o último incremento de tempo.

#### 6.3.7 - ROTINA RESULT

Ela entrega a saída dos resultados,  $u$  e  $p$  para os nós do contorno e o potencial nos pontos internos por cada incremento de tempo até o tempo máximo da análise.

#### 6.3.8 - ROTINA INSTEP

Esta rotina é a mais relevante dentro do programa, e uma listagem dela em linguagem FORTRAN é mostrada no Anexo no final da tese.

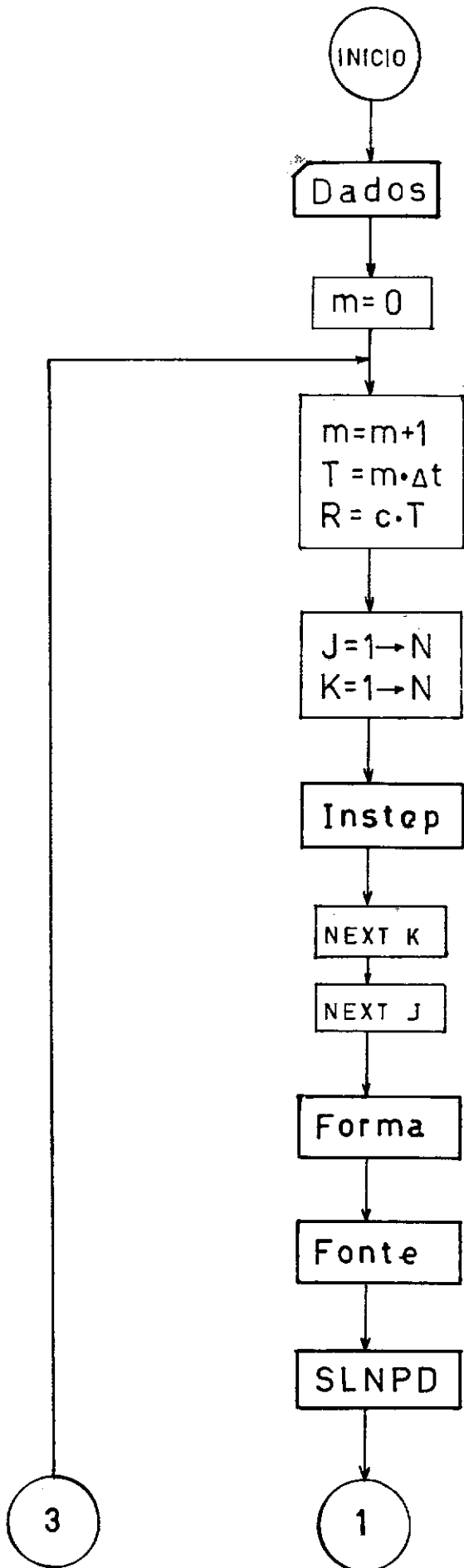
Em termos gerais podemos dizer que a ROTINA INSTEP efetua:

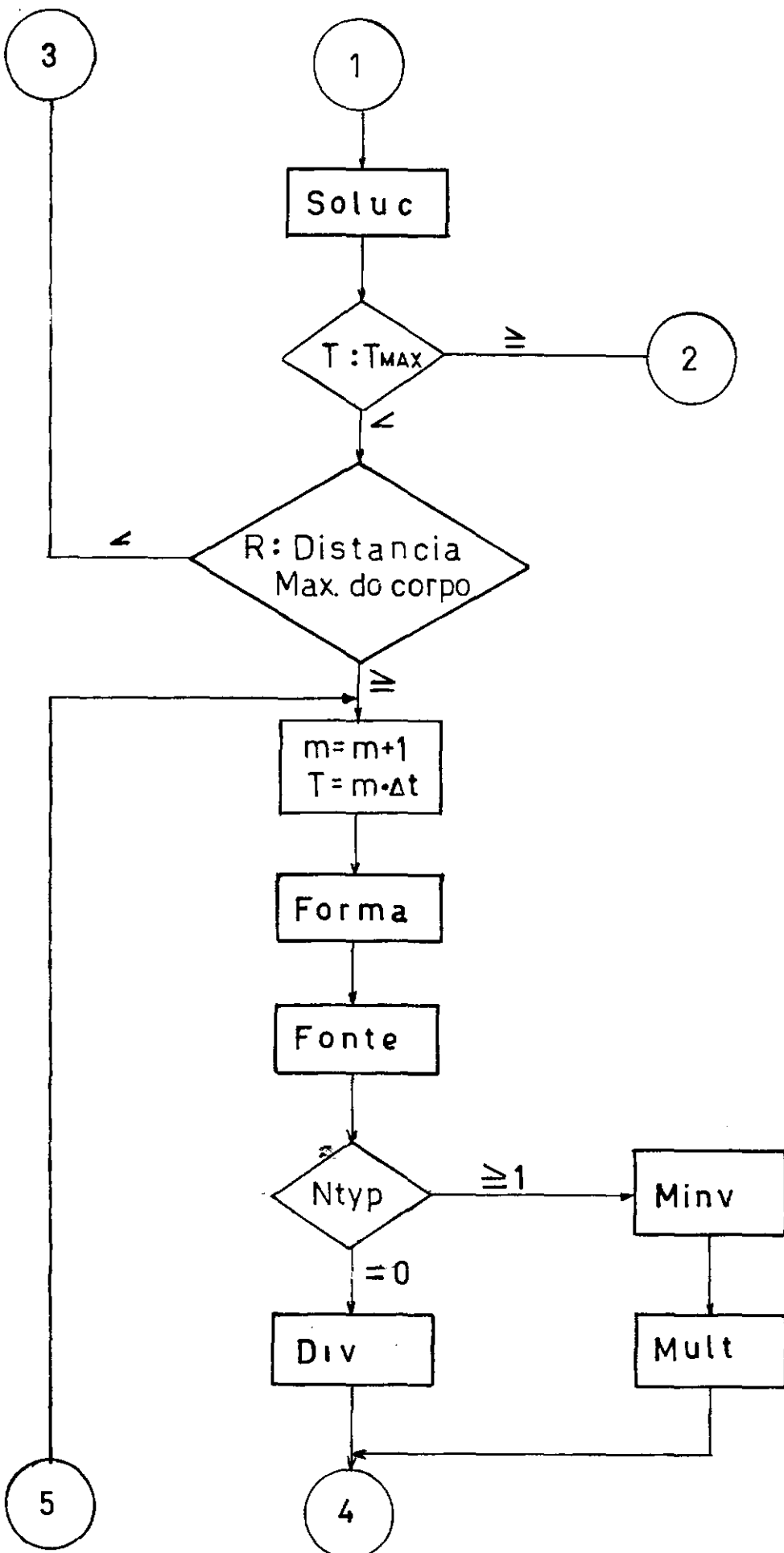
- 1 - Cálculo dos coeficientes  $G_1, G_2, H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$  da equação (4.2.6) para cada ponto de integração do elemento  $K$  em relação ao nó fonte  $j$ .
- 2 - Os coeficientes anteriores são armazenados nas matrizes  $GG$  e  $HH$  cujo número de filas é igual ao número de pontos de integração, e o número de colunas é igual a 3 em  $GG$ , para guarda  $G_1, G_2$  e  $n$  por cada ponto e de 5 em  $HH$ , para ar

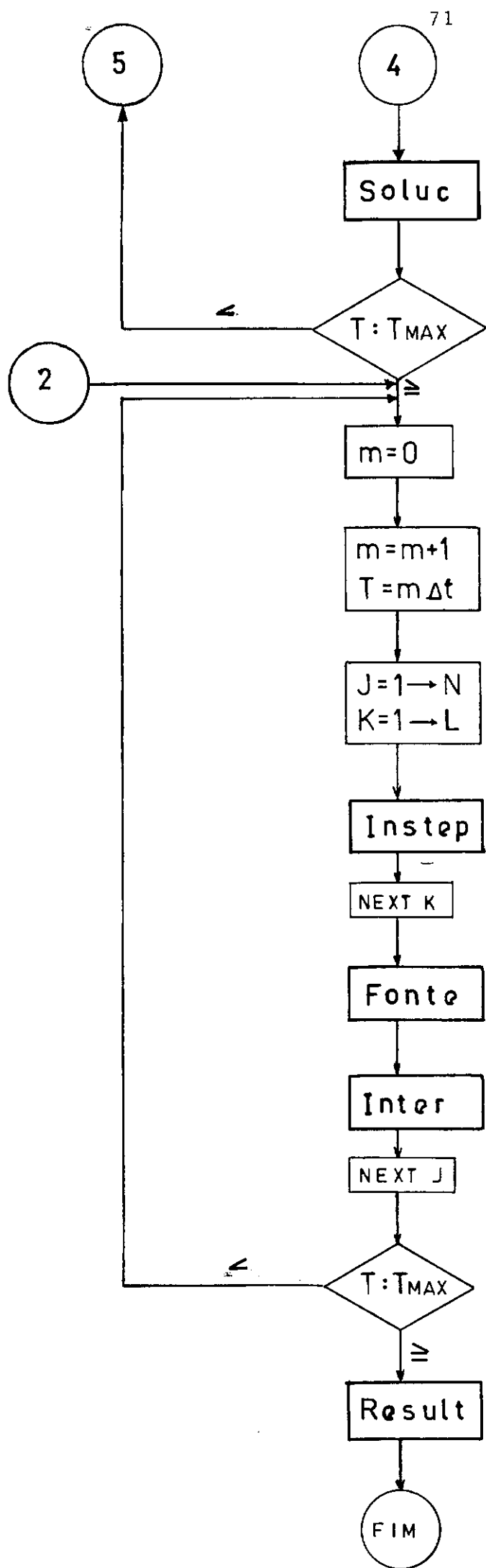
mazenar  $H_1, H_2, H_3, H_4$  e  $n$  do mesmo modo.

- 3 - Reordenação e somatório dos coeficientes em  $GG$  e  $HH$  nas matrizes  $AG$  e  $AH$  em relação ao valor de  $n$  máximo e mínimo para o elemento  $K$  em relação ao nó fonte  $j$ .
- 4 - As matrizes  $AG$  e  $AH$  são introduzidas nas matrizes tridimensionais  $GM(I, j, k)$  e  $HM(I, j, k)$  que permanecem durante todo o processo, as matrizes mencionadas em 2) e 3) são somente auxiliares.
- 5 - Guarda o valor mínimo e máximo de  $n$  para cada combinação entre nó fonte  $j$  e elemento  $K$  nas matrizes  $\underline{N}_1$  e  $\underline{N}_2$ . Em  $\underline{N}_1$  armazena os valores mínimos e em  $\underline{N}_2$  os máximos; estas matrizes são necessárias para efetuar o processo descrito em 3) e 7).
- 6 - Seleciona das primeiras posições das matrizes tridimensionais  $HM(i, j, k)$  e  $GM(i, j, k)$ , as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  que contêm os coeficientes para as incógnitas  $u$  e  $p$  do último intervalo de tempo.
- 7 - Calcula o produto dos coeficientes contido em  $HM$  e  $GM$  pelos potenciais  $u$  e fluxo  $p$  relativos a tempos retardados que contribuem para o vetor das constantes independentes.

#### 6.4 - FLUXOGRAMA









## CAPÍTULO VII - EXEMPLOS NUMÉRICOS. ANÁLISE

### 7.1 - INTRODUÇÃO

Quatro exemplos diferentes foram processados através do programa computacional, o primeiro trata-se de uma fonte concentrada atuando em um espaço semi-infinito, sendo a variação no tempo desta fonte dada por uma função analítica. Um segundo exemplo refere-se ao problema de scattering para dois tipos de ondas planas incidentes devido à presença de um cilindro circular como obstáculo [15]. O terceiro exemplo, trata da determinação da pressão em um ponto gerada por uma fonte concentrada em uma caixa retangular de paredes rígidas [22]. O quarto e último exemplo analisa um corpo tridimensional submetido a uma função de força que varia no tempo da mesma forma que a função Heaviside, com duas condições de apoio diferentes.

Nos exemplos segundo até quarto analisam-se o comportamento das soluções para os diferentes esquemas de combinação das funções de interpolação. Se estudará também o comportamento das respostas para diferentes intervalos de tempo para o quarto exemplo.

### 7.2 - EXEMPLO I. FONTE POTENCIAL CONCENTRADA EM UM ESPAÇO SEMI-INFINITO

O espaço semi-infinito foi definido por 49 elementos quadriláterais de lados iguais a 1000, (Figura 7.2.1) a fonte concentrada está localizada a uma altura de 2000 sobre o centro da malha (as unidades são omitidas). Foram calculados os potenciais em dois pontos internos e comparados os resultados do elemento central da malha (elemento nº 25) com a solução exata.

Os valores exatos do potencial em qualquer ponto do semi-espço, inclusive seu contorno são obtidos a partir da solução do problema de duas fontes pontuais em um espaço infinito, onde o plano de simetria  $x-y$  corresponde ao contorno do semi-espço (ver Figuras 7.2.1 e 7.2.2).

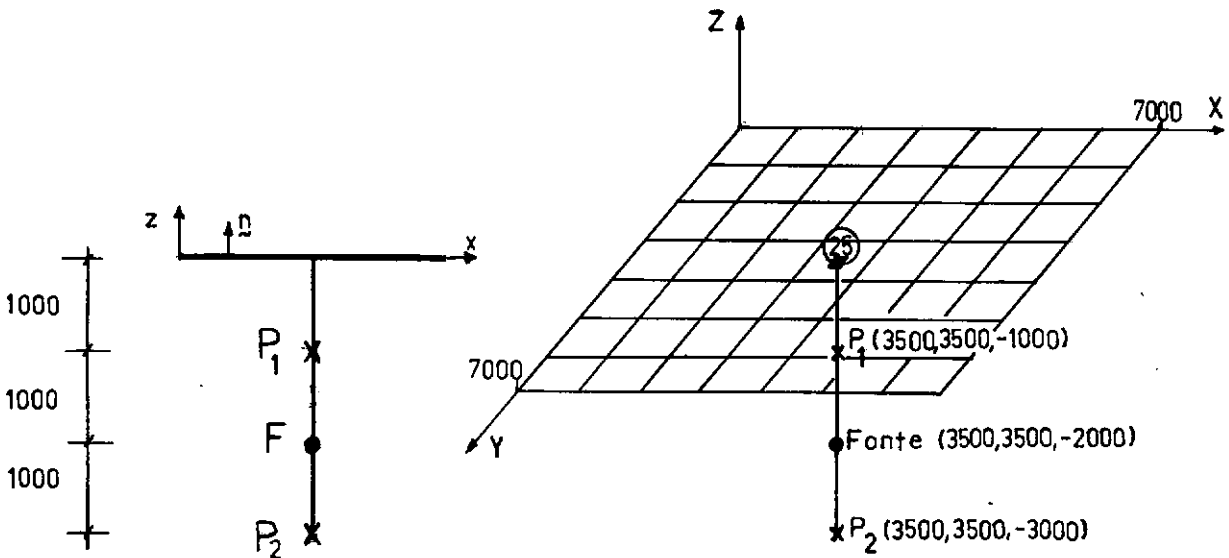


Figura 7.2.1 - Fonte em Espaço Semi-Infinito

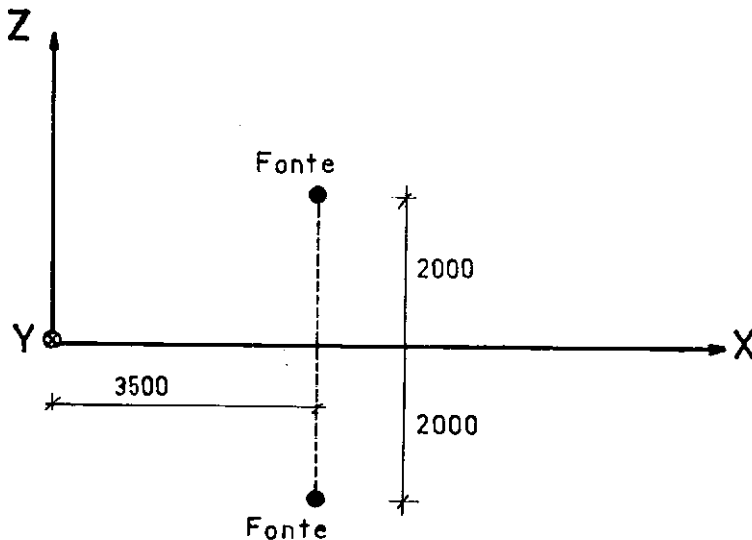


Figura 7.2.2 - Duas Fontes no Espaço Infinito

A função de fonte concentrada em  $(3500, 3500, -2000)$  é

$$F(tr) = 100 \text{ tr}$$

onde  $tr = t - R/C$

$$R = |Q_F - Q|$$

$R$  é a distância da fonte a qualquer ponto.

As condições de contorno do espaço semi-infinito são: fluxo nulo em toda a superfície, assim fica como incôgnita somente o potencial em cada elemento.

Na Figura (7.2.3) apresentam-se os resultados numéricos deste exemplo juntamente com a solução analítica. O intervalo de tempo  $\Delta t$  usado foi 1000 e o valor da velocidade de propagação adotado foi igual a um.

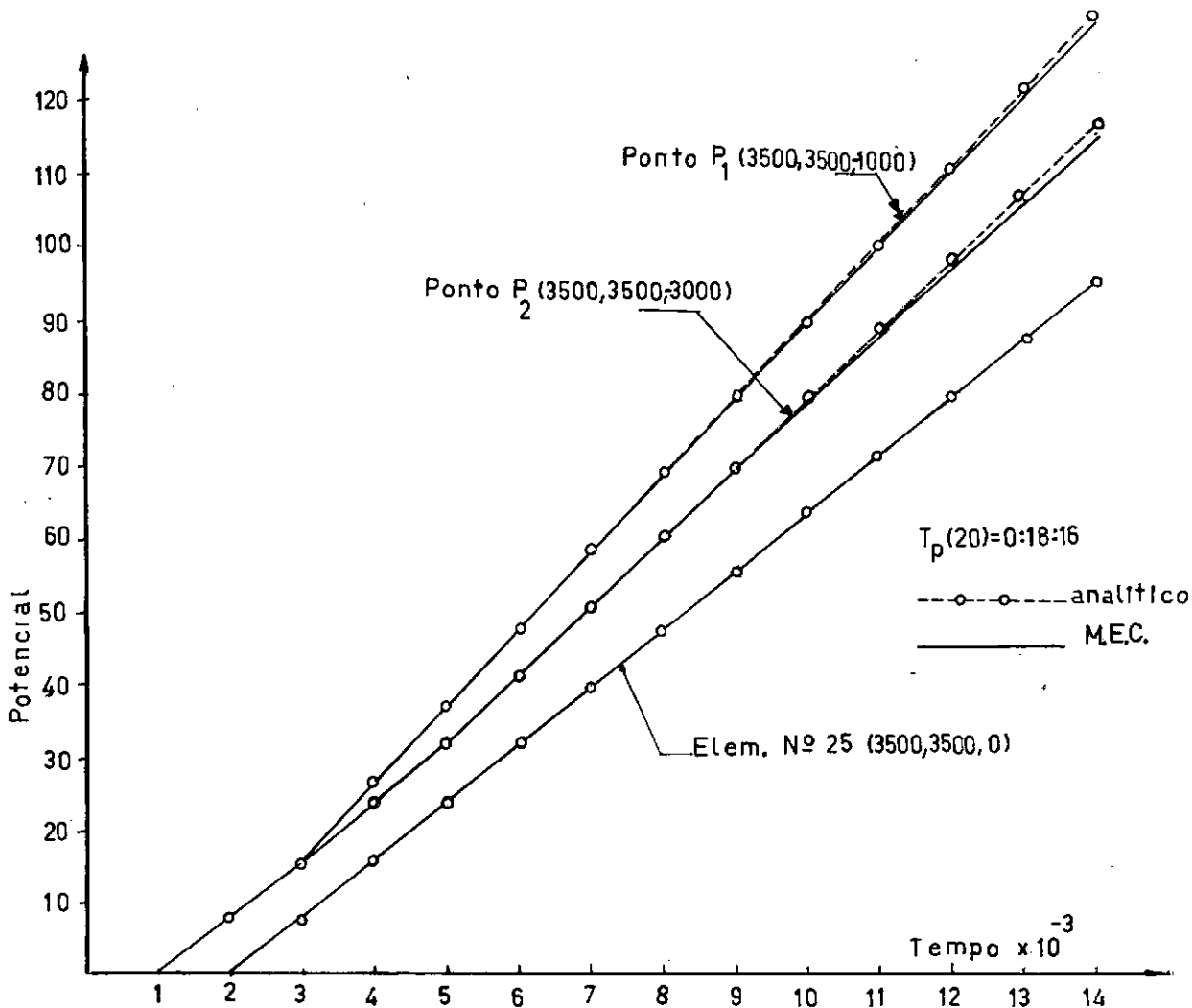


Figura 7.2.3 - Potencial em  $P_1$ ,  $P_2$  e no Elemento nº 25

Se utilizou neste exemplo 16 pontos de integração; vimos na Figura 7.2.3 como os pontos  $P_1$  (3500, 3500, - 1000) e  $P_2$  (3500, 3500, - 3000) recebem as ondas refletidas

na superfície a partir dos tempos 3000 e 5000 respectivamente fazendo que seu potencial aumente.

### 7.3 - EXEMPLO II. SCATTERING DE ONDAS PLANAS POR UM CILINDRO CIRCULAR

Neste exemplo é analisado o scattering de ondas planas por um cilindro circular de comprimento infinito. O problema é bidimensional e foi estudado por SHAW [15], que reduz a equação integral de Kirchhoff para duas dimensões integrando analiticamente em relação ao seu comprimento infinito, assim ele emprega elementos unidimensionais ao longo do perímetro de uma seção qualquer.

Compararemos os resultados obtidos para um cilindro de comprimento finito com os obtidos por SHAW para a mesma seção e ondas planas incidentes.

A função de fonte concentrada da equação integral (3.5.25),  $f(\text{trs})$  é substituída pelas funções que definem as ondas planas incidentes; a equação integral fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(s, t) = & \frac{\phi_W(s, t)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{R} p(q, \text{tr}) d\Gamma + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{R \cdot n}{R^2} \left\{ \frac{1}{R} u(q, \text{tr}) + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} (q, \tau) \right)_{\tau=\text{tr}} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

onde  $\phi_W$  é a onda incidente definida como:

i ) Linear:

$$\phi_W = 0.5 (ct - x) H(ct - x) \quad (7.3.2)$$

onde  $H(ct - x)$  é a função Heaviside.

ii) Linear-constante:

$$\phi_W = \begin{cases} 0.5 (ct - x) H(ct - x) & \text{quando } ct - x < 1 \\ 0.5 & \text{quando } ct - x \geq 1 \end{cases} \quad (7.3.3)$$

As condições de contorno do problema são:

$$p(q, t) = 0 \quad q \in \Gamma \quad \text{em qualquer instante } t.$$

As condições iniciais são nulas, isto é:

$$u(q, 0) = 0$$

$$p(q, 0) = 0 \quad q \in \Gamma$$

$$\dot{u}(q, 0) = 0$$

A geometria do cilindro fica definida para um raio unitário e a malha foi truncada nos planos  $z = 0$  e  $z = 1,4$  ou  $z = 1,75$ . Foram utilizados 72 e 90 elementos, o perímetro contém 18 subdivisões ( $\Delta\theta = 20^\circ$ ), como é mostrada na Figura (7.3.1). A velocidade de propagação  $c$  é unitária. Foram utilizados 36 pontos de integração.

ESQUEMAS	u	p	$\dot{u}$	Pontos para Diferenciação Numérica
1	Linear	Linear	Linear	Três pontos
2	Linear	Linear	Constante	Dois pontos

Tabela 7.1

As Figuras 7.3.2 a 7.3.4 apresentam os resultados para o scattering devido à onda incidente linear em três pontos, localizados em  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  e referidos a uma altura  $z = 0,525$  para o caso de discretização com 72 elementos e no caso da malha de 90 elementos em

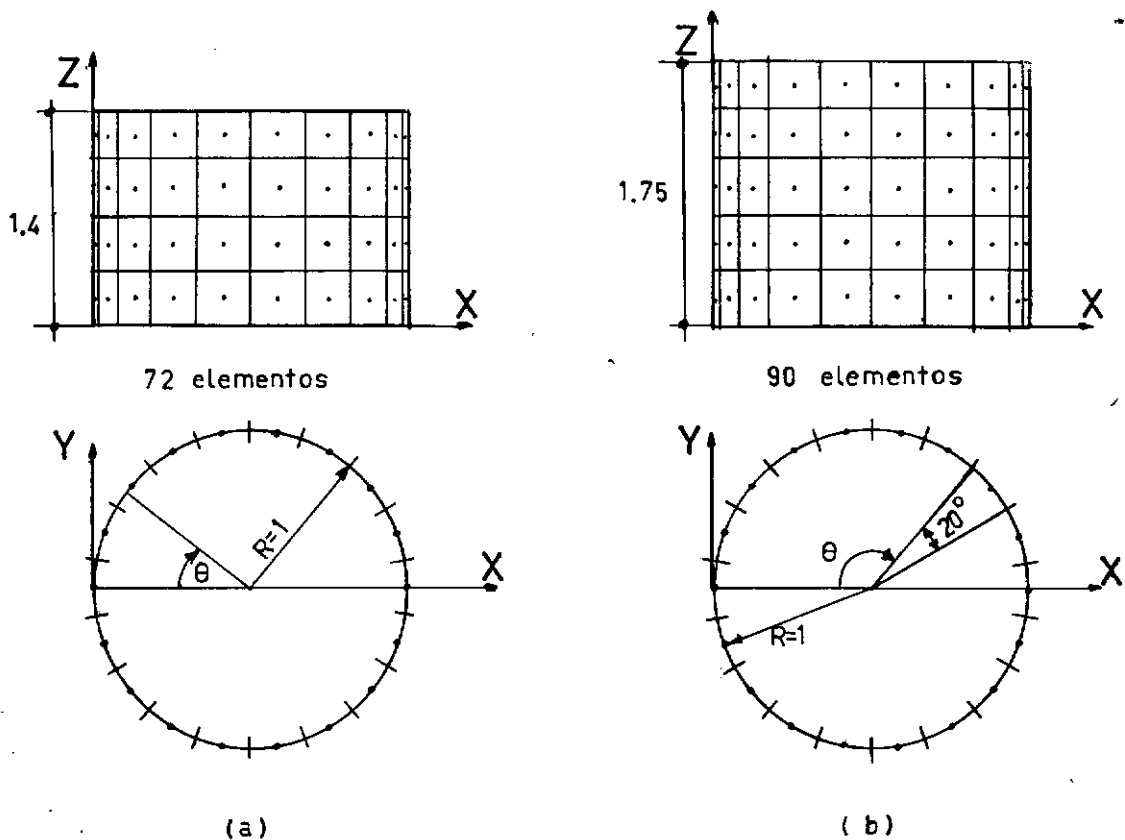


Figura 7.3.1 - Cilindro Discretizado em 72 e 90 Elementos Quadrilaterais

$z = 0.875$ . Para  $\theta = 90^\circ$  o resultado é obtido da média entre os dois elementos adjacentes, pois não existe um nó de elemento nessa posição.

Os três exemplos foram processados com o esquema 1. Na Figura 7.3.2 são mostrados os resultados para discretização com 72 elementos e intervalo de tempo igual a 0.25. Na Figura 7.3.3 foi o caso de 90 elementos e intervalos de tempo igual a 0.35. Para mostrar a influência que tem o tamanho finito do cilindro, aumentam-se as coordenadas com respeito a  $z$  em 40% do problema com 90 elementos, mantendo as demais constantes.

Pode-se constatar que na medida que o cilindro é mais comprido os resultados tendem a ser mais paralelos com a função  $\phi_w$  ou onda incidente.

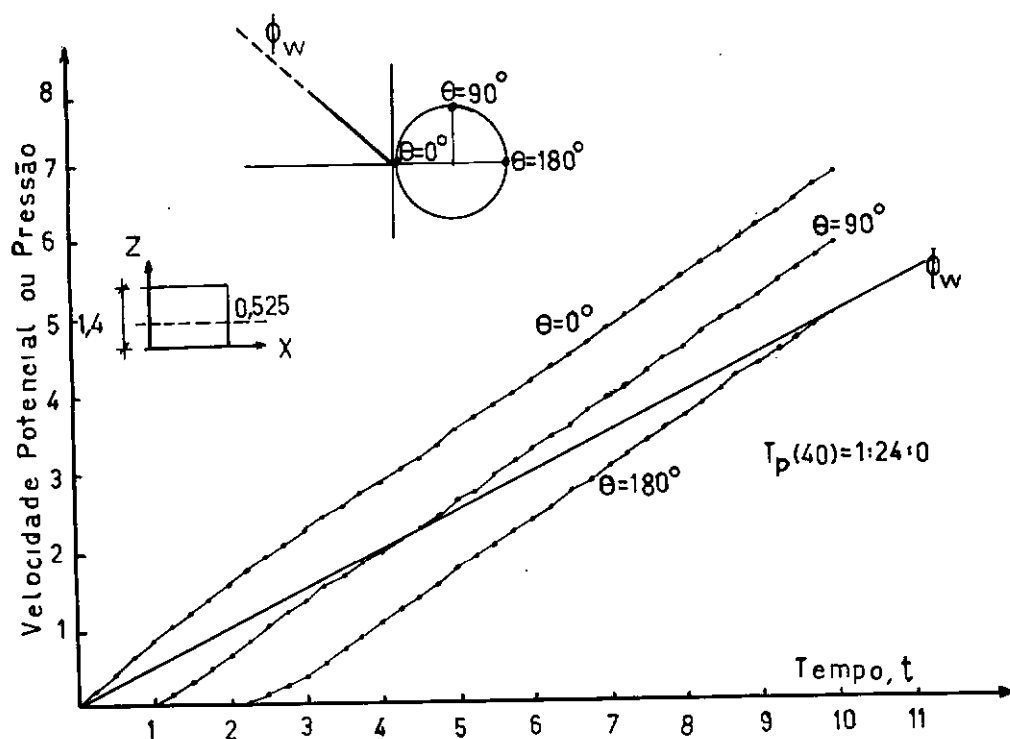


Figura 7.3.2 - Velocidade Potencial para  $\theta=0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 0.525$  devido à Onda Plana Linear ( $\Delta t = 0,25$  e 72 Elementos). Esquema 1.

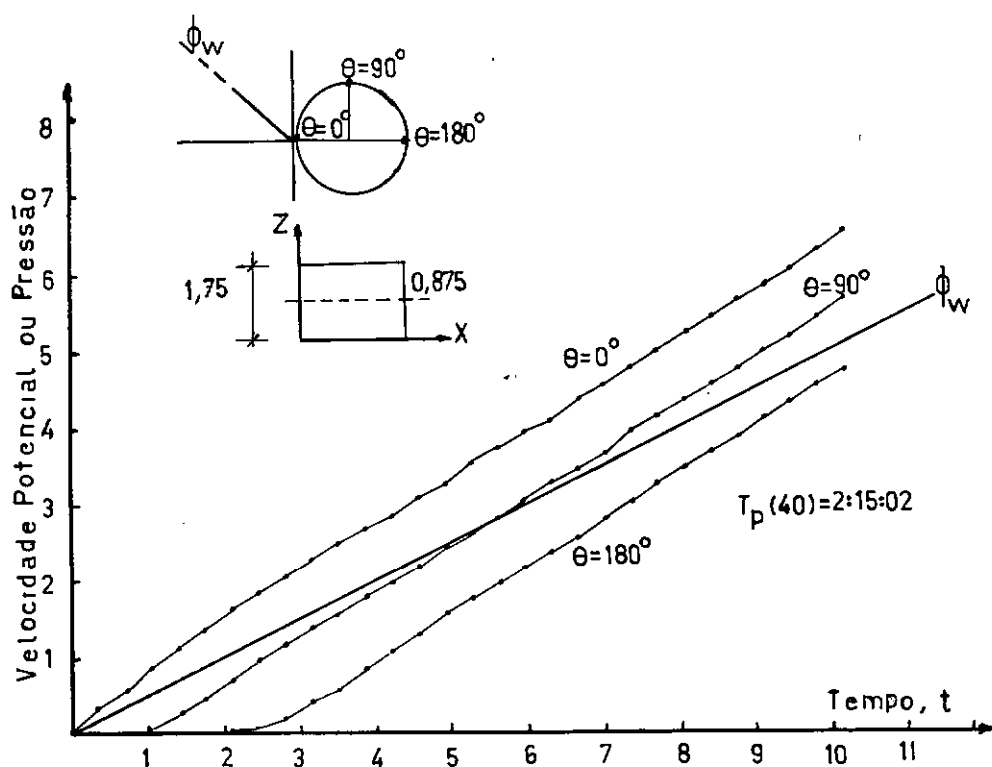


Figura 7.3.3 - Velocidade Potencial para  $\theta=0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 0.875$  devido à Onda Plana Linear ( $\Delta t = 0.35$  e 90 Elementos). Esquema 1.

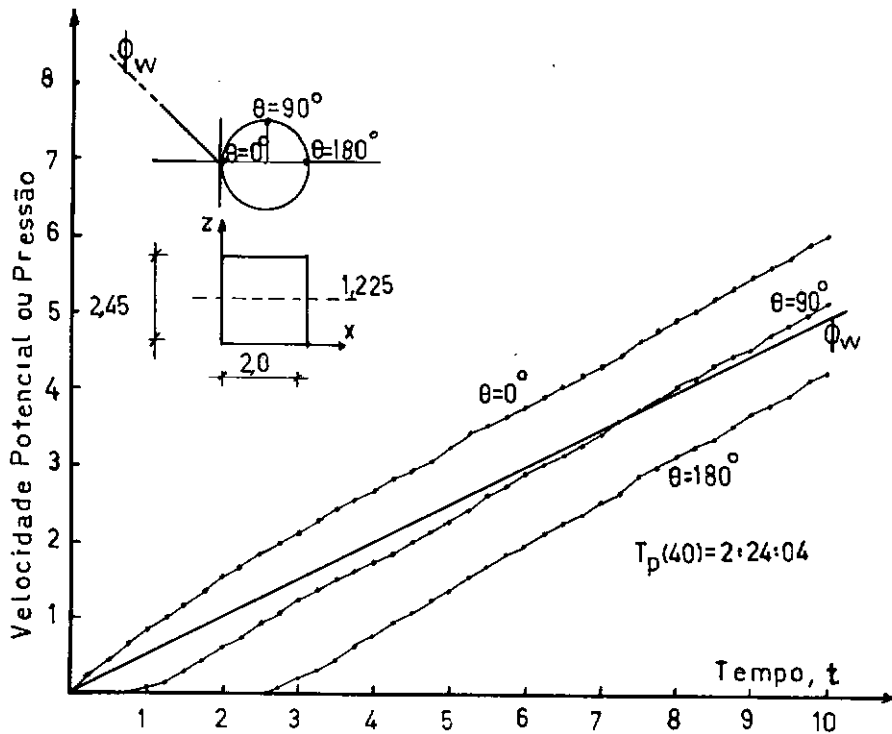


Figura 7.3.4 - Velocidade de Potencial para  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 1.225$  ( $\Delta t = 0.25$  e 90 elementos). Coordenadas em  $z$  aumentadas 40%. Esquema 1

Os exemplos a seguir referem-se ao scattering para a onda plana incidente linear constante (ver equação 7.3.3). Os esquemas 1 e 2 foram usados, e a malha desta análise tem 90 elementos.

Nas Figuras 7.3.5 e 7.3.6 se apresentam resultados para os nós do contorno do cilindro para  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em uma altura  $z = 0.875$  e  $z = 1.225$ , este último valor é 40% maior que o anterior porque as coordenadas foram aumentadas a fim de diminuir a influência dos extremos nos resultados. Ambos os casos foram estudados sob o esquema 1.



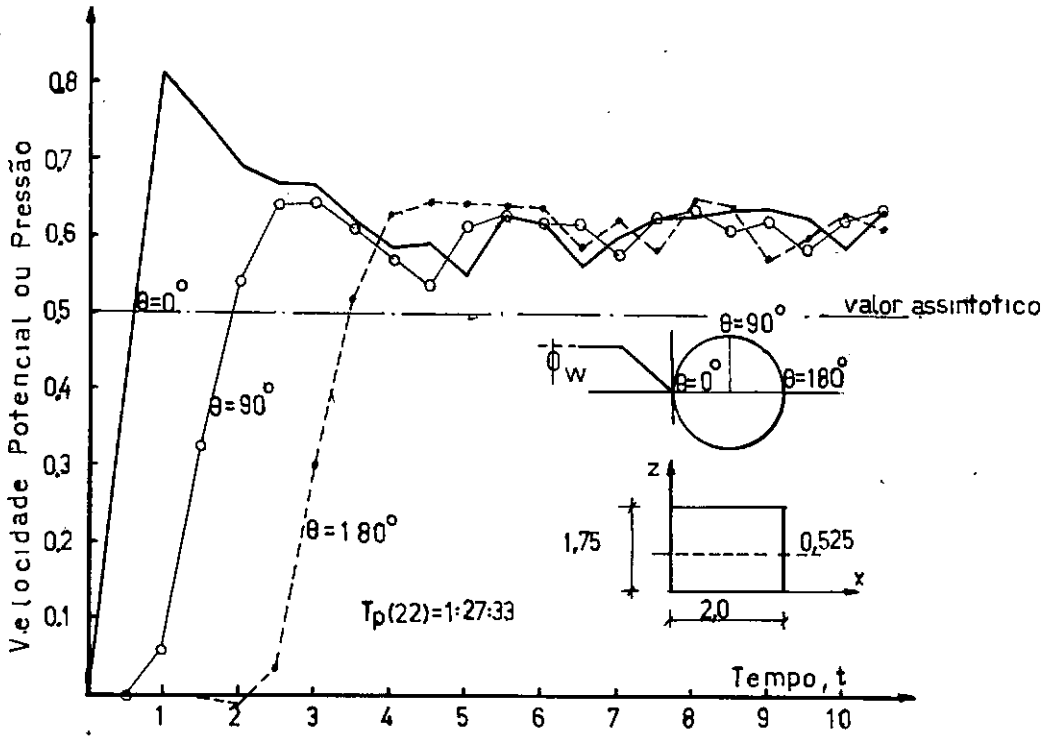


Figura 7.3.5 - Velocidade Potencial para  $\theta=0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 0.875$  devido à Onda Plana Linear-Constante ( $\Delta t = 0.5$  e 90 Elementos). Esquema 1.

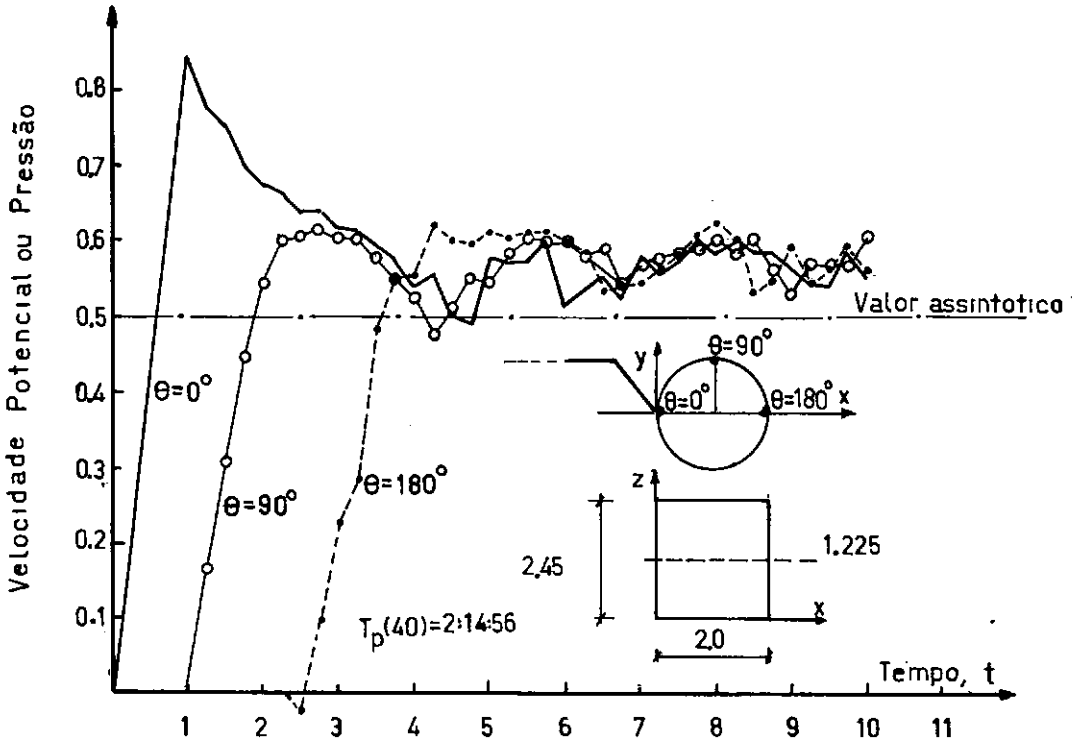


Figura 7.3.6 - Velocidade Potencial para  $\theta=0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 1.225$  devido à Onda Plana Linear-Constante ( $\Delta t = 0.25$  e 90 Elementos). Coordenadas em  $z$  aumentadas 40%. Esquema 1.

Quando a formulação dada pelo esquema 2 é usada obtêm-se os resultados mostrados nas Figuras 7.3.7 e 7.3.8. Observamos dois aspectos neste caso; quando as coordenadas são aumentadas as curvas tendem aproximar-se mais do valor 0,5 a partir de  $t = 6$ . Também a mudança para o esquema 2, faz diminuir as oscilações dos resultados numéricos.

Foram utilizados 36 pontos de integração (6 em cada direção do plano dos elementos) e 40 "time-step" de 0.25 unidades.

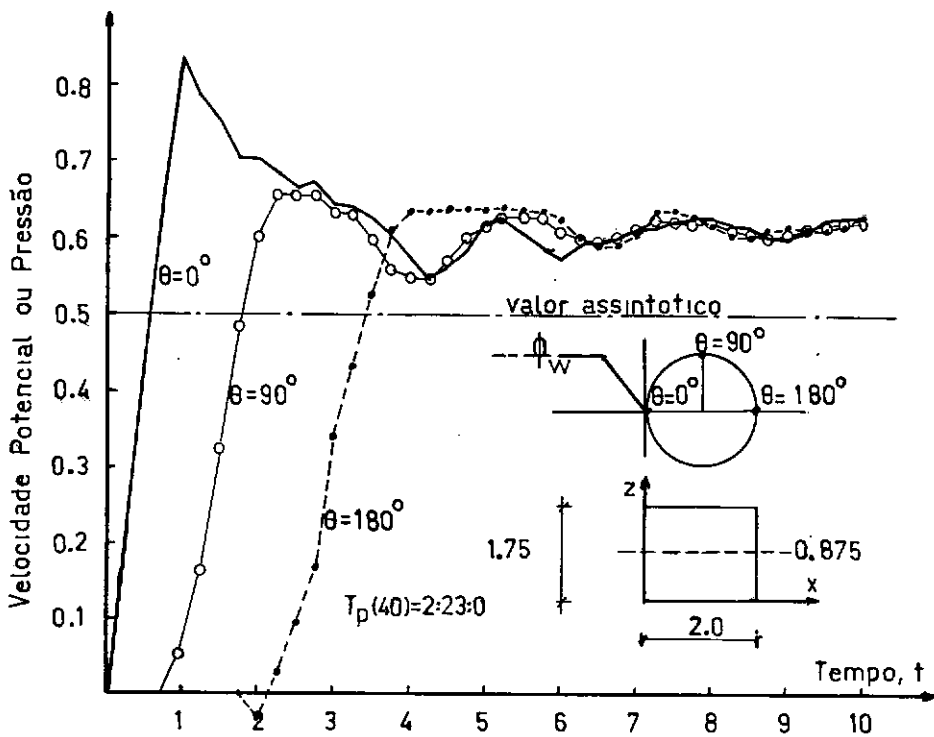


Figura 7.3.7 - Velocidade Potencial para  $\theta = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 0.875$  devido à Onda Plana Linear-Constante ( $\Delta t = 0.25$  e 90 Elementos). Esquema 2

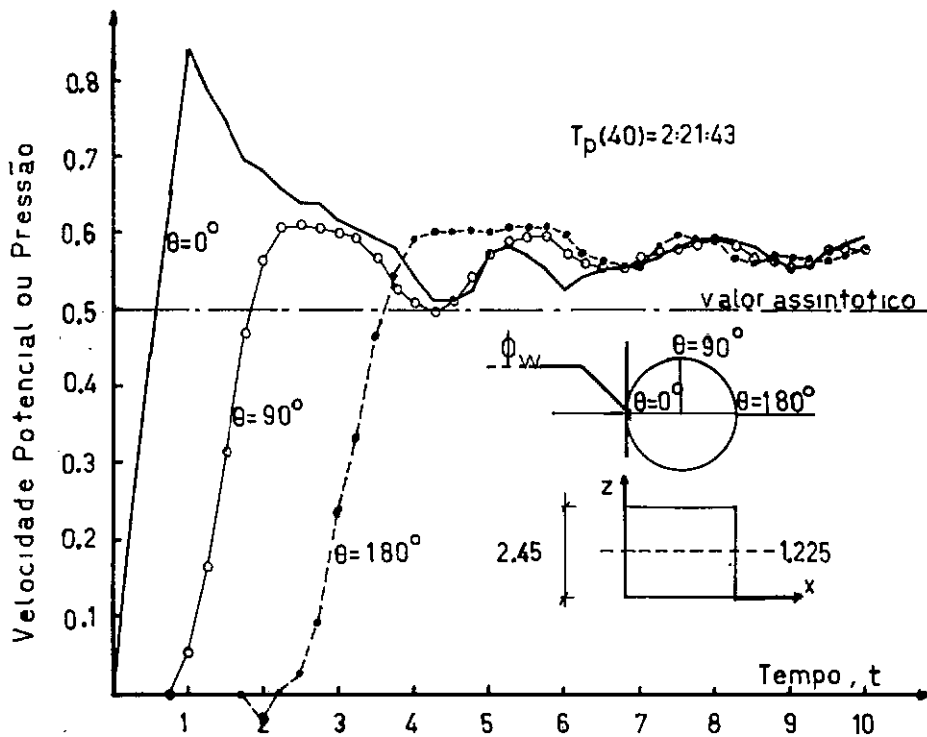


Figura 7.3.8 - Velocidade Potencial para  $\theta=0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$  em  $z = 1.225$  devido à Onda Plana Linear-Constante ( $\Delta t = 0.25$  e 90 Elementos). Esquema 2. Coordenadas em  $z$  aumentadas em 40%.

#### 7.4 - EXEMPLO III. PRESSÃO EM UM PONTO DENTRO DE UMA CAIXA RETANGULAR

Este é um exemplo estudado por GRONENBOM [22] e [32], usando 376 elementos constantes [32] e 32 elementos quadrilaterais quadráticos. A escolha do intervalo de tempo  $\Delta t$  em relação à discretização ou malha foi um dos aspectos relevantes.

A caixa retangular está definida pelos planos (as unidades são omitidas):

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5$$

dentro dela acha-se uma fonte concentrada localizada no ponto (1, 2, 3) dada por:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ f(t) &= 7.2338 \times 10^{-8} * t * (t - 288) & 0 < t < 288 \\ f(t) &= 0 & t \geq 288 \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

A pressão está dada por [32].

$$p = - \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7.4.2)$$

onde  $\rho$  e  $v$  são a densidade do meio e  $v$  a magnitude de velocidade definida por:

$$v^2 = u_{,i} \cdot u_{,i} \quad (7.4.3)$$

sendo  $u$  a velocidade potencial ou potencial.

As condições de contorno são fluxo zero em todas as paredes em qualquer instante, as condições iniciais são de repouso.

É calculada a pressão no ponto  $P(1, 2, 4)$ , por diferenciação numérica da equação (7.4.2), observou-se que o segundo termo de equação (7.4.2) é desprezível em relação ao primeiro nesta análise para qualquer valor do tempo.

Se discretizou a caixa em 54 elementos de contorno no quadriláteros de diferentes tamanhos, correspondendo a 9 por face. Foram utilizadas as combinações das funções de interpolação definidas nos esquemas 1 e 2 da Tabela 7.1.

Nas Figuras 7.4.1 e 7.4.2 são mostrados o valor da pressão no ponto  $P(1, 2, 3)$  para um intervalo de tempo

igual a 6; na primeira destas figuras utilizou-se o esquema 1 e na seguinte o esquema 2.

Nas Figuras 7.4.3 e 7.4.4 mostram-se o valor de pressão no mesmo ponto P considerando agora um intervalo de tempo menor, igual a 4.5, novamente a primeira figura é obtida no esquema 1 e a figura 7.4.4 são o esquema 2. Um total de 36 pontos de integração foi utilizado em todos estes exemplos.

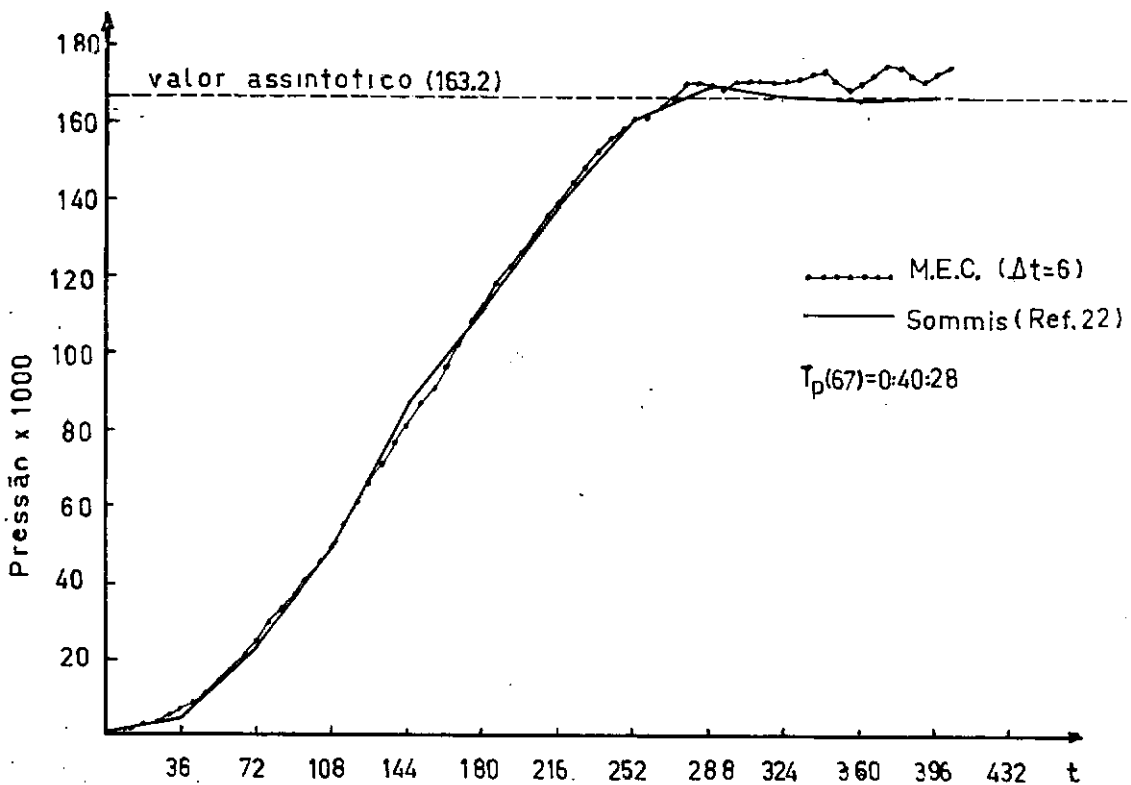


Figura 7.4.1 - Pressão no Ponto (1, 2, 4) em uma Caixa Retangular com Paredes Rígidas.  
Esquema 1.

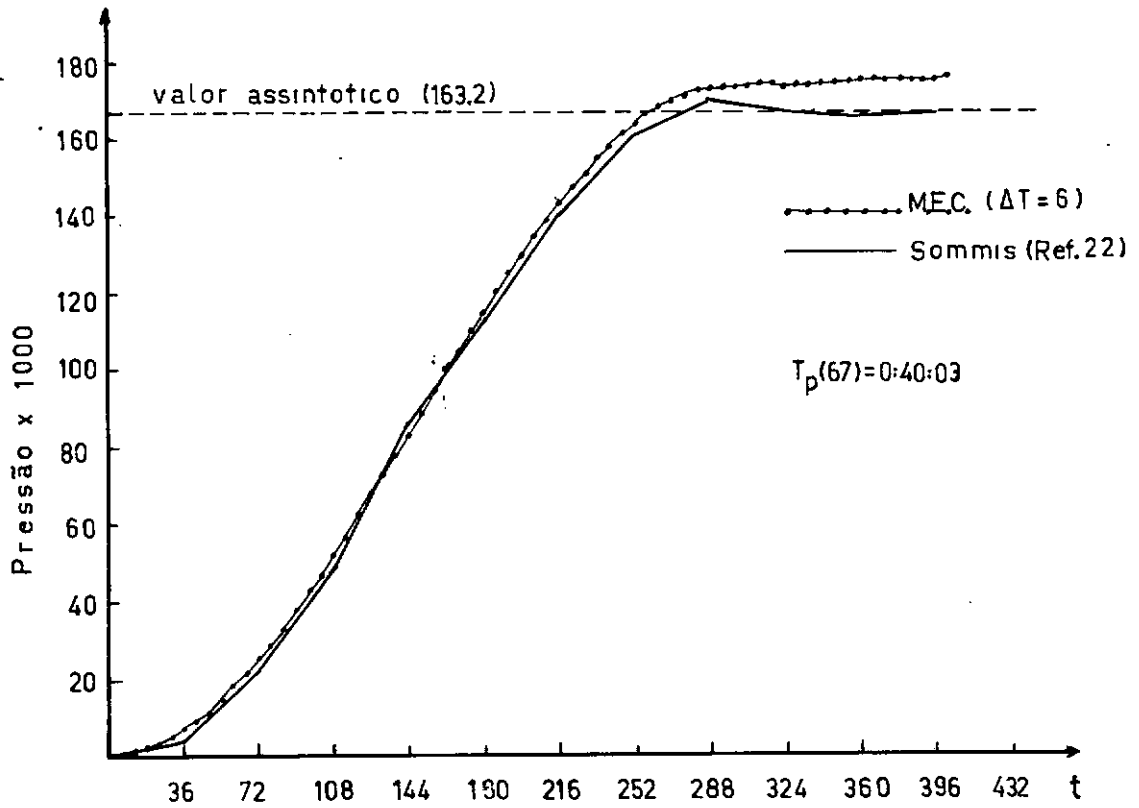


Figura 7.4.2 - Pressão no Ponto (1, 2, 4) em uma Caixa Retangular com Paredes Rígidas. Esquema 2.

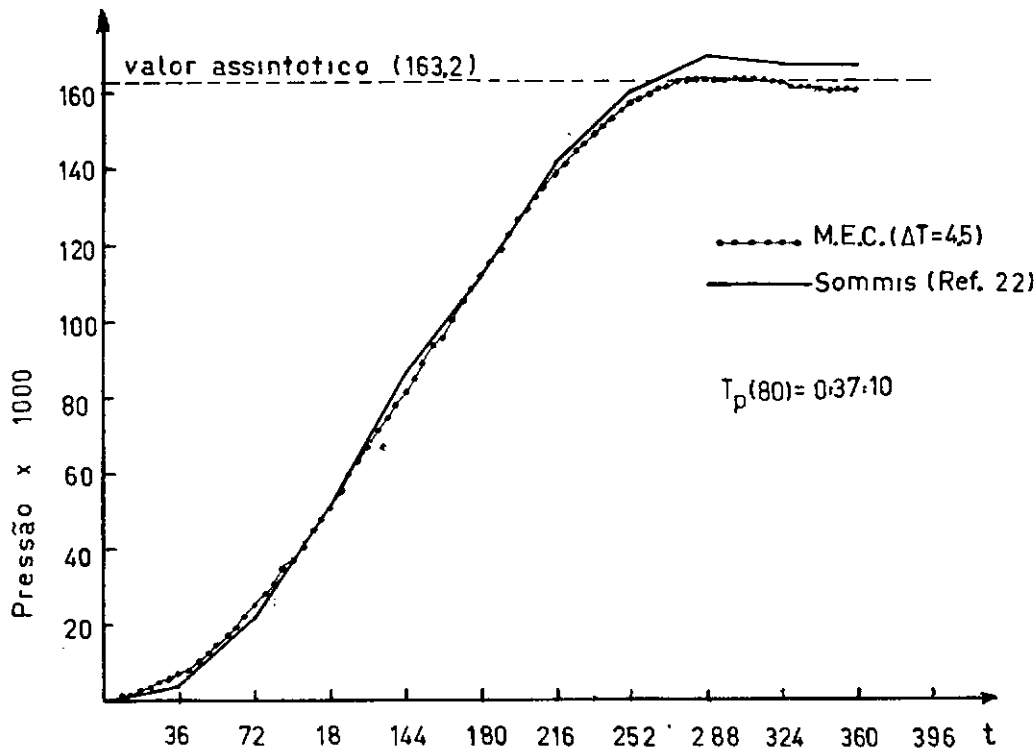


Figura 7.4.3 - Pressão no Ponto (1, 2, 4) em uma Caixa Retangular com Paredes Rígidas. Esquema 2.

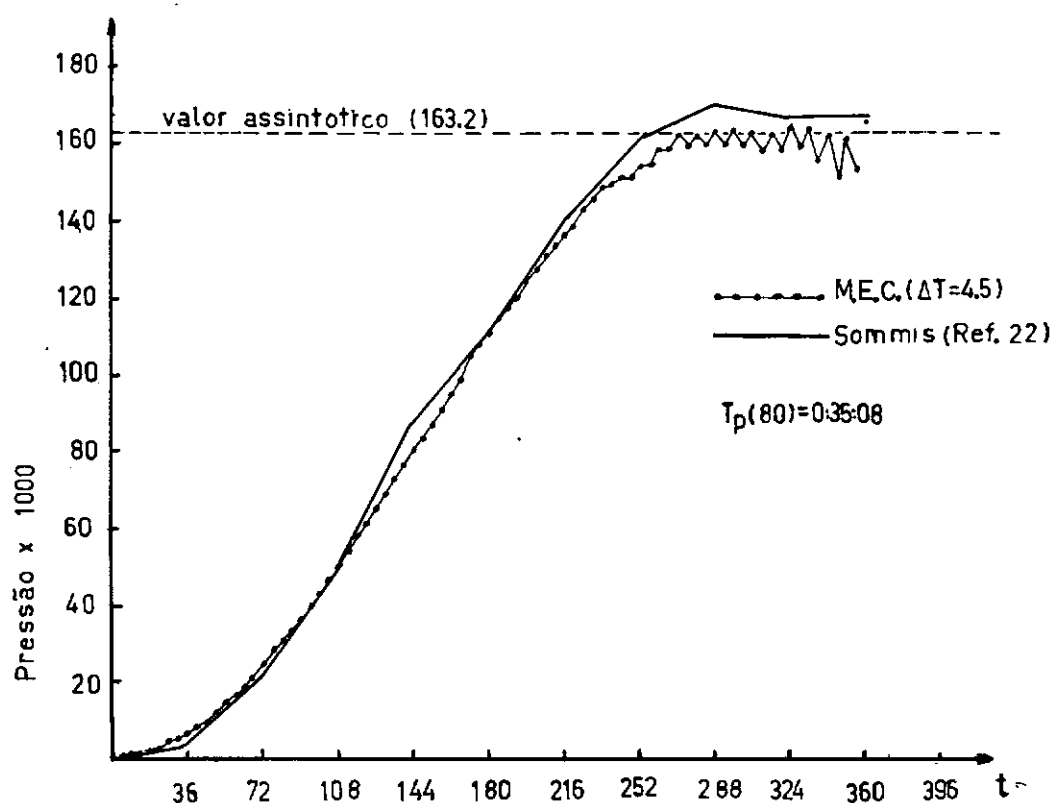


Figura 7.4.4 - Pressão no Ponto (1, 2, 4) em uma Caixa Retangular com Paredes Rígidas. Esquema 1.

Observamos que quando é utilizado o esquema 2 da combinação de funções de interpolação são eliminadas praticamente as oscilações observadas nas Figuras 7.4.1 e 7.4.4 para os tempos finais. Para os tempos finais  $t > 288$  a solução exata é o valor assintótico igual a  $0.1632 \{22\}$ .

#### 7.5 - EXEMPLO IV. CORPO SUBMETIDO A UMA FORÇA TIPO HEAVISIDE

Neste caso a topologia e condições de contorno usadas fazem do exemplo a ser estudado como unidimensional. O corpo está limitado pelos planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$x = a, \quad y = a, \quad z = a$$

Duas diferentes condições de contorno serão utilizadas, no primeiro caso (Figura 7.5.1a) são prescritos somente fluxos nulos no contorno, exceto em  $x = 0$  e  $x = a$  onde a carga  $E_p$  unitária é aplicada subitamente e mantida constante até o final da análise. No segundo caso fluxo diferente de zero é prescrito em  $x = 0$  onde a carga  $E_p$  unitária é também aplicada subitamente e mantida constante até o final da análise, e no plano  $x = a$  agora é prescrito potencial ou deslocamento igual a zero (Figura 7.5.1b).

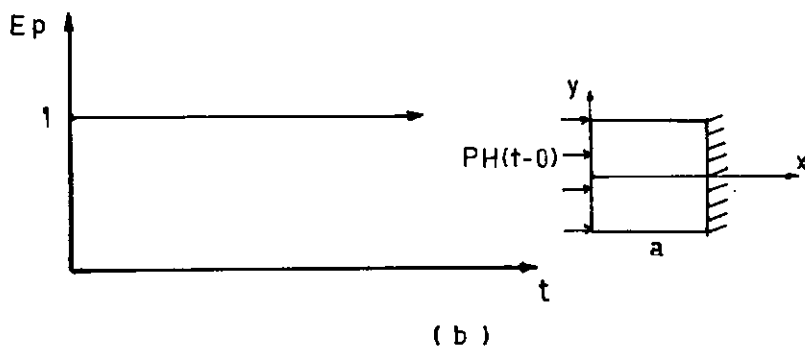
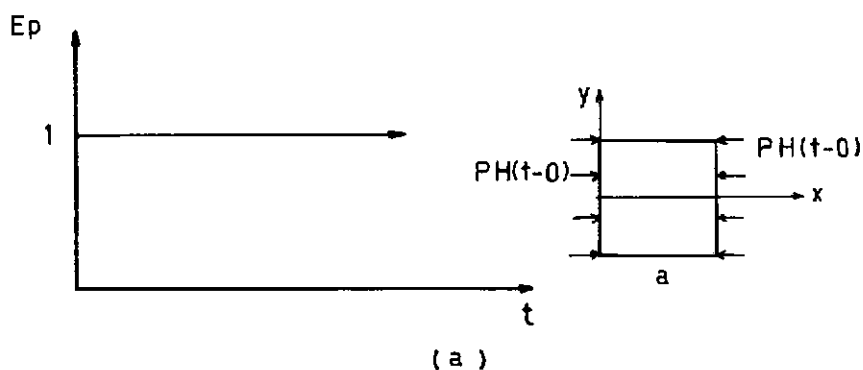


Figura 7.5.1 - Função de Força Heaviside e Condições de Contorno.



O contorno foi discretizado em malhas de 54 elementos e 90 elementos quadrilaterais de igual dimensão. Utilizou-se em todos os exemplos 16 pontos de integração e os esquemas de combinação das funções de interpolação foram:

ESQUEMAS	u	p	u	Nº Pontos para Diferenciação Numérica
1	Linear	Linear	Linear	Três pontos
2	Linear	Linear	Constante	Dois pontos
3	Linear	Constante	Linear	Três pontos
4	Linear	Constante	Constante	Dois pontos

Tabela 7.2

O primeiro conjunto de análises refere-se ao caso das condições de contorno definidas na Figura 7.5.1a. Em todos eles é estudada a solução numérica do potencial ou deslocamento do ponto A localizado em  $x = 0$ ,  $y = a/2$  e  $z = a/2$ , com diferentes "time-step" a fim de estudar o comportamento e estabilidade da solução. Foram aplicados os esquemas 1 e 2 indicados na Tabela 7.2.

Assim, nas Figuras 7.5.2 a 7.5.4 apresentam-se os resultados para o deslocamento do ponto A  $(0, a/2, a/2)$  com a discretização de 54 e 90 elementos sob esquema 1 com diferentes intervalos de tempo

Podemos apreciar neste primeiro grupo de exemplos que para a formulação baseada no esquema 1, a escolha do intervalo de tempo tem relação direta com a estabilidade da solução, pois quando o incremento aumenta, a solução tende a crescer excessivamente a partir de  $ct = 7a$ , ou simplesmente a solução desloca-se no eixo  $ct$ . Quando o valor de  $\Delta t$  é tal que a cir

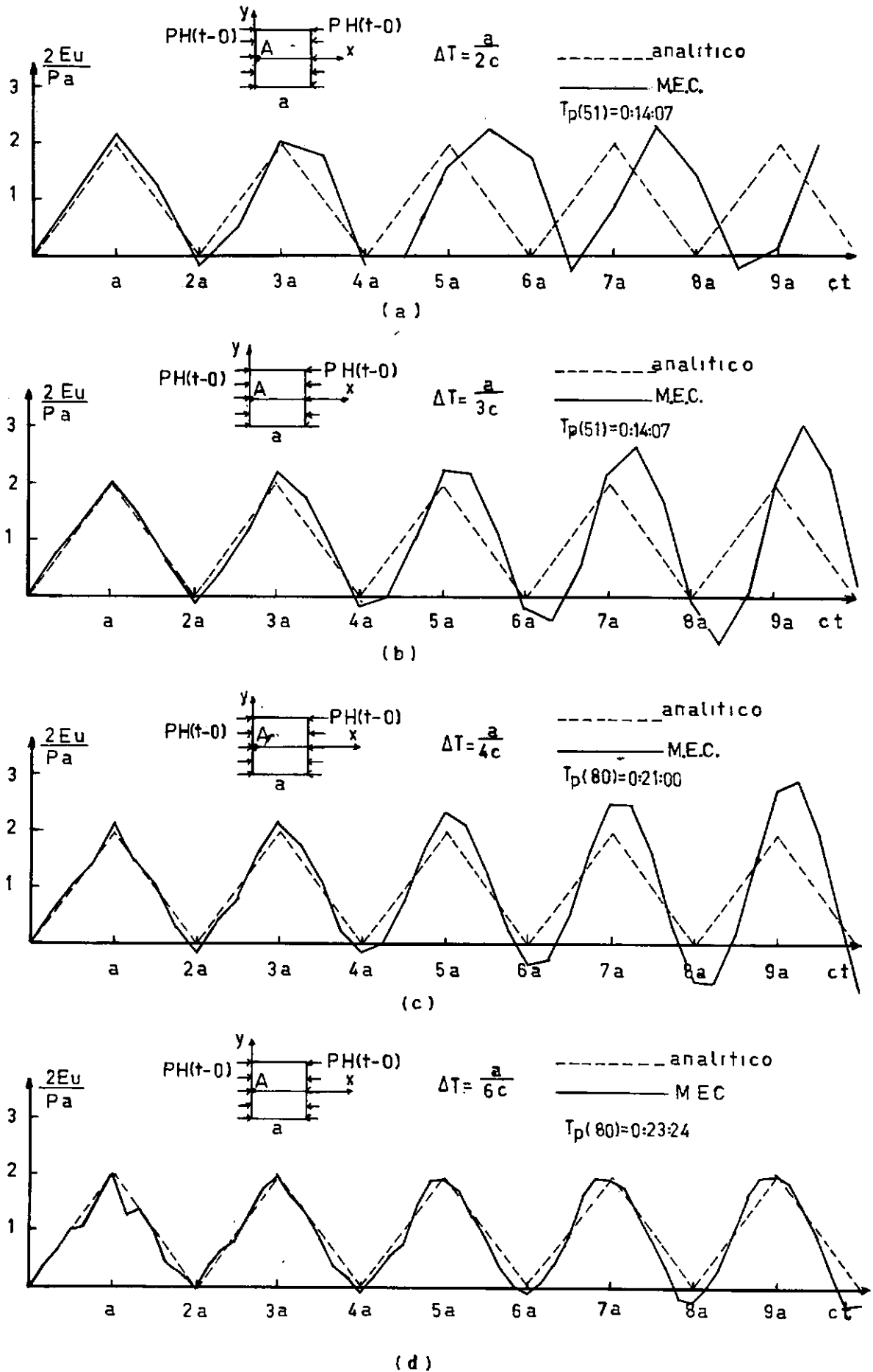


Figura 7.5.2 - Deslocamento no Ponto A(0, a/2, a/2) para Diferentes Intervalos de tempo  $\Delta t$ . Malha de 54 Elementos.  
Esquema 1 da Tabela 7.2.

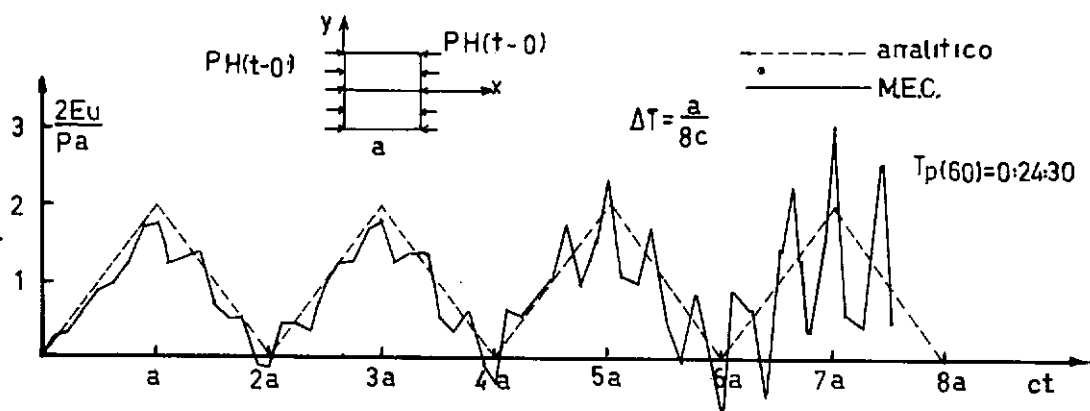


Figura 7.5.3 - Deslocamento no ponto A(0, a/2, a/2) para  $\Delta t = a/8c$ . Malha de 54 Elementos. Esquema 1 da Tabela 7.2.

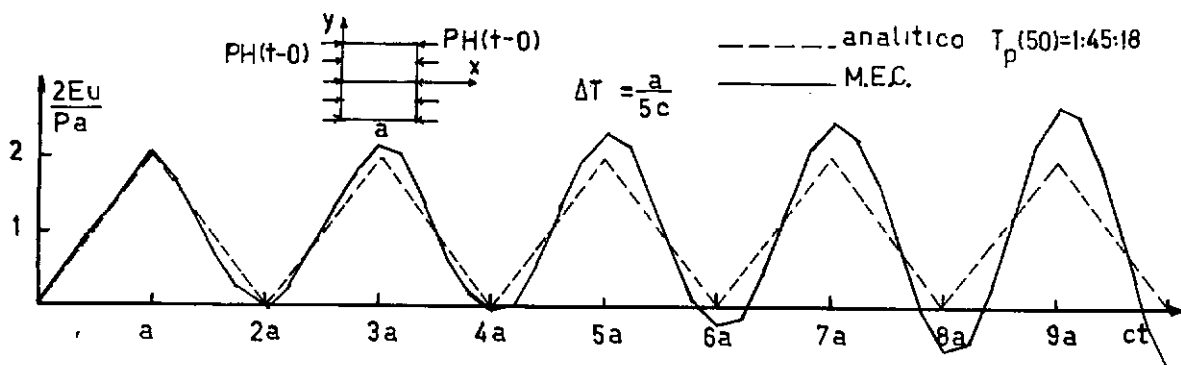
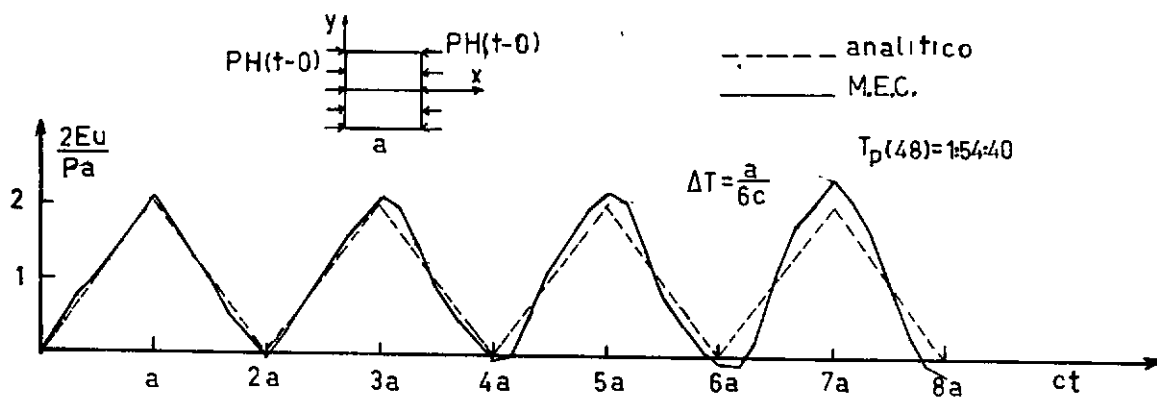
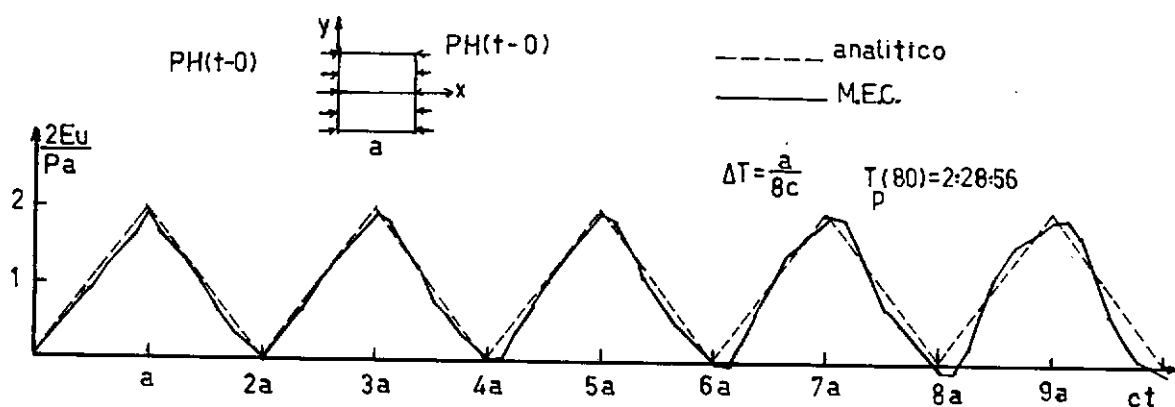


Figura 7.5.4 - Deslocamento no Ponto A(0, a/2, a/2) sob Diferentes Intervalos de Tempo. Malha de 96 Elementos. Esquema 1 da Tabela 7.2

cunferência de raio  $C\Delta t$  com origem no centro do elemento fica inscrita dentro do elemento (Figuras 7.5.2d e 7.5.4a) o que corresponde a  $\Delta t = a/6c$  e  $\Delta t = a/8c$  para as malhas de 54 e 90 elementos respectivamente as soluções foram estáveis após várias reflexões de onda. Se valores ainda menores são utilizados para  $\Delta t$  a solução numérica para o deslocamento do ponto A, torna-se novamente instável (Figura 7.5.3).

Dos resultados anteriores podemos notar que quando mudamos a malha de 54 para 90 elementos o intervalo de tempo para se obter as melhores soluções diminui de  $a/6c$  para  $a/8c$ . Os lados dos elementos são  $a/3$  e  $a/4$  respectivamente.

Um aspecto diferente acontece quando é empregada a formulação do esquema 2, diferente do esquema 1 em relação à aproximação de  $\dot{u}$  e a fórmula de diferenciação numérica que está baseada agora na fórmula que utiliza dois pontos.

Na Figura 7.5.5 se apresenta o deslocamento do ponto A para  $\Delta t = a/8c$  o qual tinha um comportamento instável segundo mostra-se na Figura 7.5.3; neste caso utilizando o esquema 2 a instabilidade a partir de  $ct = 4a$  desaparece, mais apresenta erros de precisão numérica, resultando a uma diferença sensível em relação ao valor máximo no pico.

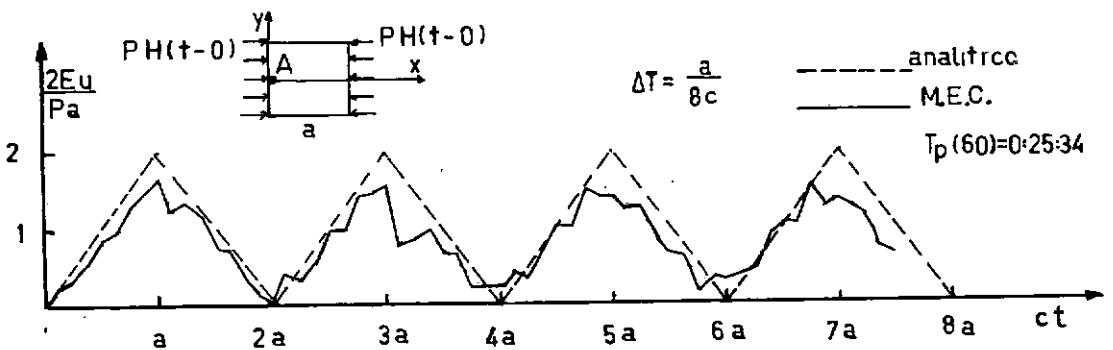


Figura 7.5.5 - Deslocamento no Ponto A(0, a/2, a/2). Malha de 54 Elementos. Esquema 2 da Tabela 7.2.

A instabilidade numérica que observamos nas Figuras (7.5.2a) e (7.5.2b) pode ser eliminada quando mudamos para o esquema 2, mais o deslocamento começa gradativamente a diminuir tendendo ao valor 1 (não mostrado totalmente), conforme indicado nas Figuras 7.5.6a e 7.5.6b, apresentada a seguir.

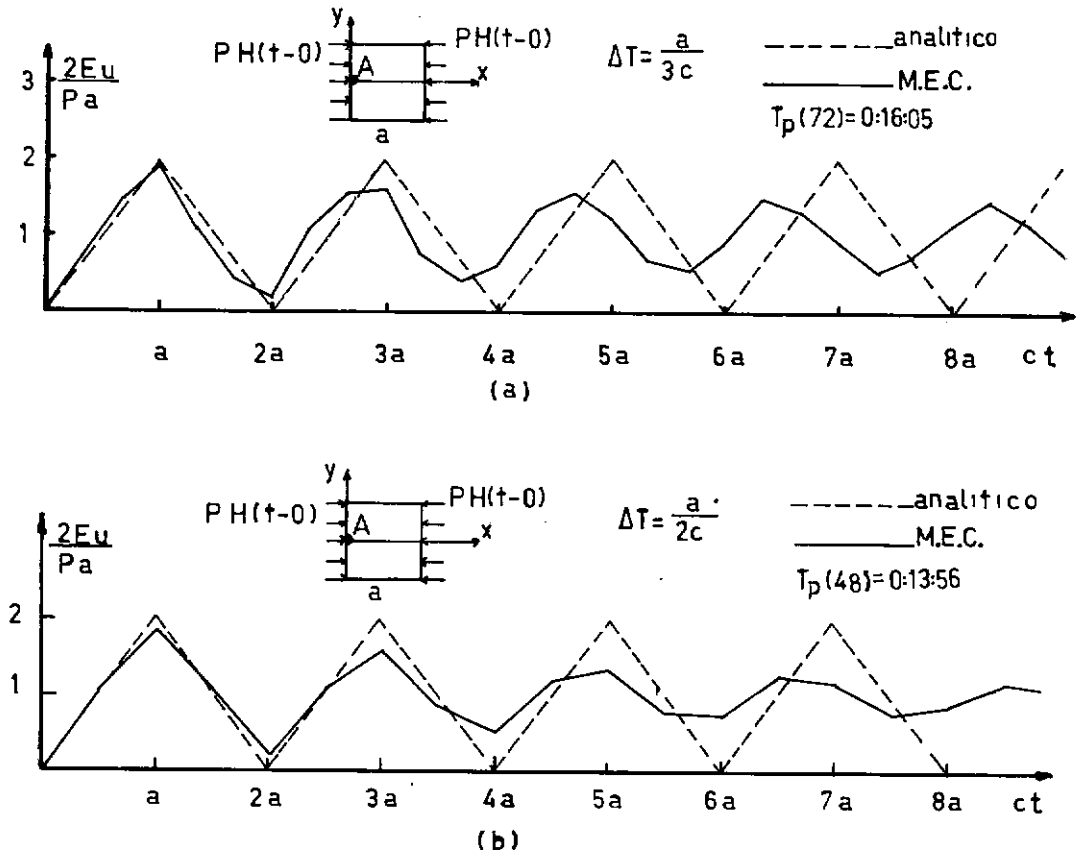


Figura 7.5.6 - Deslocamento do Ponto A(0, a/2, a/2). Malha de 54 Elementos. Esquema 2 da Tabela 7.2.

Analisaremos agora o mesmo problema sob as condições de contorno mostradas na Figura 7.5.1b. Foi comprovado também neste tipo de problema que o melhor intervalo de tempo para se obter melhores soluções numéricas para o fluxo no ponto B(a, a/2, a/2) corresponde ao observado nos exemplos anteriores.

Estudaremos o comportamento do ponto  $B(a, a/2, a/2)$ , localizado no "engastamento" utilizando a malha de 96 elementos, dois diferentes "time-step", e com as formulações dos esquemas 3 e 4 da Tabela 7.2.

Na Figura 7.5.7, temos o fluxo ou derivada normal do deslocamento no ponto  $B(a, a/2, a/2)$ , para o esquema 3, isto é,  $p$  usa função de interpolação constante no tempo, e a derivada numérica de  $\dot{u}$  usa três pontos. O intervalo de tempo escolhido foi  $a/8c$ . A Figura 7.5.8 mostra como os resultados anteriores são modificados pelo uso do esquema 4, no qual agora  $\dot{u}$  usa função de interpolação constante no tempo e a fórmula de diferenciação numérica emprega dois pontos.

Finalmente na Figura 7.5a tem-se a derivada normal do deslocamento do ponto  $B$  para o intervalo de tempo  $a/4c$  sob o esquema 4.

Cabe salientar que neste tipo de exemplo foram empregados as formulações 3 e 4 cuja característica mais importante é a de utilizar uma função de interpolação constante para  $p$ , devido a que a solução analítica ou exata para  $p$  (derivada normal do deslocamento em  $B$ ) é uma função descontínua no tempo. Quando foram utilizados os esquemas 1 ou 2, uma grande instabilidade de oscilação em torno dos valores constantes é produzida, posto que estes esquemas interpolam linearmente o fluxo  $p$  no tempo, forçando a continuidade.

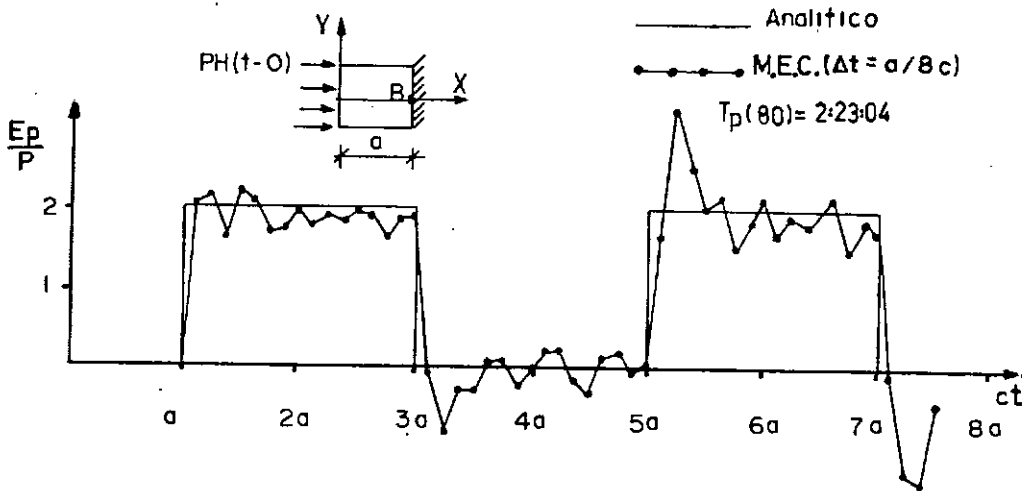


Figura 7.5.7 - Derivada Normal do Deslocamento no Ponto B(a, a/2, a/2).  
Esquema 3. Malha de 96 Elementos.

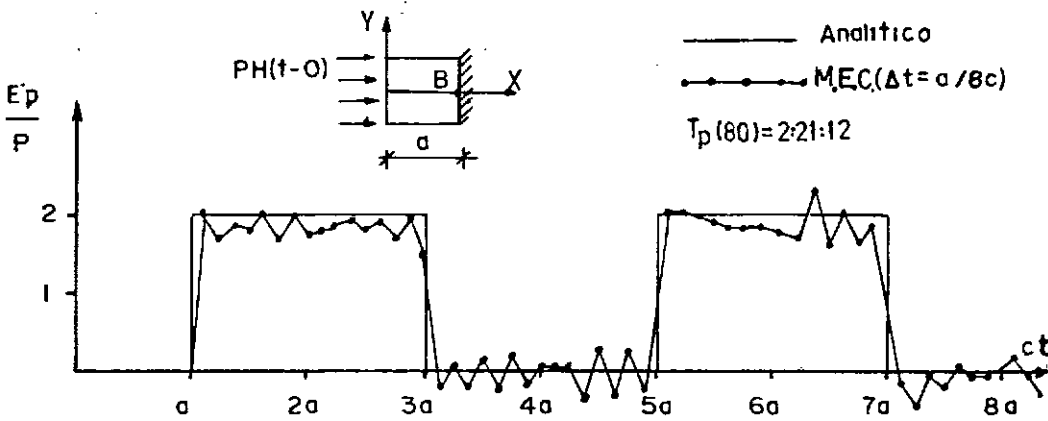


Figura 7.5.8 - Derivada Normal do Deslocamento no Ponto B(a, a/2, a/2).  
Esquema 4. Malha de 96 Elementos.

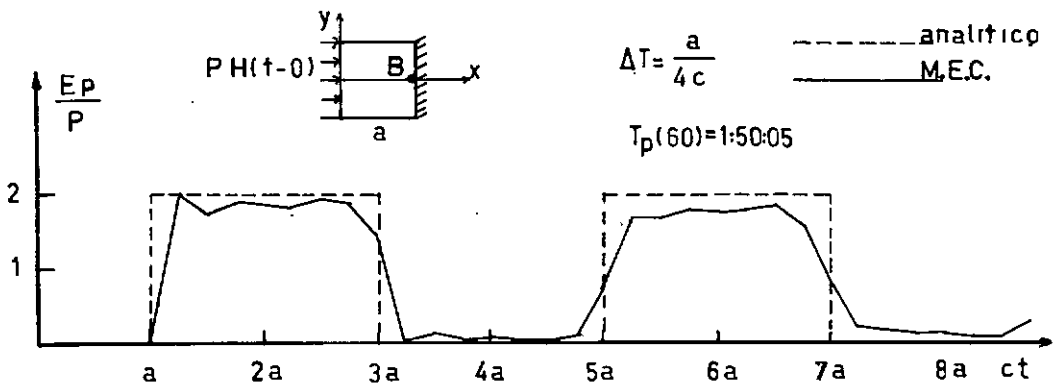


Figura 7.5.9 - Derivada Normal do Deslocamento no Ponto B(a, a/2, a/2).  
Esquema 4. Malha de 96 Elementos.

## CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES

No presente trabalho desenvolvido pode-se observar alguma das vantagens próprias do método dos elementos de contorno em relação a outros métodos (elementos finitos, diferenças finitas). Uma das características principais do método empregado é a redução do problema em uma dimensão, assim domínios tridimensionais somente são discretizados em elementos bidimensionais pertencentes ao seu contorno. Além do mais, podemos escolher pontos do domínio nos quais nós desejamos avaliar as incógnitas ou variáveis. Entre as desvantagens usuais do método está o fato que as matrizes que são necessárias, não são simétricas, têm pouca esparsidade e não apresentam características de banda. Este fato, embora seja uma característica geral do método não ocorre para a formulação empregada no trabalho quando é utilizado o esquema de marcha no tempo com um valor de intervalo de tempo tal que o valor da distância discreta de avanço relativa a este intervalo é menor ou igual à menor distância entre dois pontos quaisquer pertencentes a um mesmo elemento na discretização. Neste caso a matriz das incógnitas fica diagonal, portanto não é necessário invertê-la ou usar algoritmos para a solução de sistema de equações algébricas, bastando fazer simples divisões para calcular as incógnitas. Assim, tal matriz pode ser implementada mais eficientemente como um vetor de dimensão igual ao número de elementos de contorno.

Uma vantagem importante é a possibilidade de considerar domínios infinitos, especialmente para evitar que ondas sejam refletidas por contornos artificiais necessários para terminar malhas como no caso dos elementos finitos e diferenças finitas. Embora o desenvolvimento de elementos especiais [40] te



nham contribuído muito para minimizar os erros decorrentes de ondas artificialmente introduzidas, ainda assim no caso de propagação de onda a malha de elementos convencionais deve ser estendida até uma distância razoável da região perturbada. É necessário indicar que as características próprias dos fenômenos transientes em propagação de onda devem ser respeitadas na implementação numérica, isto é, que o fenômeno avance com velocidade finita através do corpo ou meio, pois este fato está presente diretamente no princípio da causalidade na solução fundamental. Assim na equação integral de Kirchhoff, quando uma perturbação é emitida no instante  $t$  em um ponto  $S$ , ela afetará ao ponto  $Q$  no tempo  $(t + |S - Q|/c)$ , e não antes.

Portanto ao se adotar elementos de ordem superior (quadrático, cúbico), deve-se observar que apesar da aproximação ser melhor o uso de elementos muito grandes pode não ser adequado, pois equivale que a onda avance além da distância real dada pela sua velocidade para um determinado tempo  $t$ . Coeficientes nas matrizes usuais  $H$  e  $G$  serão obtidos para nós que ainda estejam em repouso, ou que ainda não estejam dentro do campo de ação da perturbação. A utilização de elementos não conformes é preferível aos elementos conformes pois evita que um nó qualquer pertença simultaneamente a diferentes elementos, o que acarreta uma violação mais reduzida do princípio de causalidade.

Outros aspectos obtidos das aplicações numéricas estão vinculados com os esquemas propostos para as combinações das funções de interpolação no tempo para aproximar as variáveis  $u$ ,  $p$  e  $\dot{u}$ , e a fórmula de diferenciação numérica para  $\dot{u}$ . Dos exemplos analisados vimos em todos eles a seguinte particulari-

dade: quando existem intervalos para os quais a solução analítica da variável, seja fluxo ou potencial é constante no tempo, então a solução numérica oscila com respeito à solução analítica quando interpolação linear no tempo para fluxo e derivada de potencial é usada e mais acentuada quanto menor o intervalo de tempo empregado.

No exemplo III, vimos claramente este fato; quando usamos para  $\dot{u}$  uma função de interpolação constante e a fórmula de dois pontos para a diferenciação numérica desaparece a oscilação para a pressão quando esta começa a ser constante no tempo. O anterior acontece também na variável  $p$  ou derivada normal dos deslocamentos do ponto B mostrados nas Figuras (7.5.7) a (7.5.9), pois só é possível obter boas soluções numéricas quando a função de interpolação para  $p$  for constante.

A relação intervalo de tempo - tamanho dos elementos, para nosso caso de elementos constantes no espaço as melhores soluções são obtidas quando a circunferência de raio  $C\Delta t$ , sendo  $C$  a velocidade de propagação da onda e  $\Delta t$  o "time-step", é a maior circunferência inscrita dentro do elemento, este fato permite que a matriz dos coeficientes das incógnitas fique diagonal com as vantagens já descritas anteriormente neste capítulo.

Diferença entre os tamanhos dos elementos para manter tal critério deverá ser estudado no futuro, embora em alguns casos dos exemplos II existam diferenças de até 40% entre os lados maior e menor de um elemento e no exemplo III há também diferenças de 40% da área do menor elemento em relação ao maior, e foram obtidos bons resultados. Uma implementação de grande in

teresse é a consideração de subregiões que permitirá analisar propagação de ondas em meios não homogêneos.

Um aspecto incluído nos resultados dos exemplos do capítulo VII foram os tempos de processamento (CPU), de cada um deles, indicados sob a forma  $T_p(m) = H:M:S$ , onde  $T_p(m)$  é o tempo de processamento de  $m$  intervalos de tempo  $\Delta t$ , em horas (H), minutos (M) e segundos (S).

Finalmente, podemos dizer que pode-se obter bons resultados numéricos com a formulação desenvolvida nos problemas de propagação de onda apresentados, na qual o método dos elementos de contorno neste tipo de problemas tem certas vantagens particulares constituindo-se numa boa ferramenta de análise numérica.

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] P. MOON and D.E. SPENCER (1961), "Field Theory for Engineers",  
D. Van Nostrand, Toronto, London, New York.
- [ 2 ] C.A. BREBBIA (1980), "The Boundary Element Methods for  
Engineers", Pentech Press, London.
- [ 3 ] A. SOMMERFELD, "Optics. Lectures on Theoretical Physics",  
Vol. IV, Academic Press.
- [ 4 ] C.A. BREBBIA, J.C.F. TELLES, L.C. WROBEL (1984), "Boundary  
Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin, Hidelberg,  
New York, Tokio.
- [ 5 ] MANSUR, W.J. and BREBBIA, C.A. (1985), "Further Developments on  
the Solution of the Transient Scalar Wave Equation",  
Chapter 4, Topics in Boundary Element Research (Ed.  
BREBBIA C.A.), Springer Verlag, Berlin, New York, Tokio.
- [ 6 ] Y.C. FUNG (1965), "Foundations of Solids Mechanics", Prentice  
Hall, New Jersey.
- [ 7 ] BATHE, K,J, and WILSON, E.L. (1976), "Numerical Methods in  
Finite Element Analisis", Prentice Hall, New Jersey.
- [ 8 ] BATHE, K.J. (1982), "Finite Element Procedures in Engineering  
Analysis", Prentice Hall, New Jersey.
- [ 9 ] CRANDALL, S.H. (1956), "Engineering Analysis", Mac Graw-Hill,  
New York.
- [10] PAO, Y.H. and MOW, C.C. (1973), "Diffraction of Elastic  
Waves and Dynamics Stress", A Rand Corporation Research  
Study, Crane-Russak, New York.
- [11] MORSE, P.M. and FESHBACK, H. (1956), "Methods of Theoretical  
Physics", Mac Graw-Hill, New York, Toronto and London.
- [12] ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S. (1975), "Elastodynamics: Volume  
II", Academic Press, New York, San Francisco and London.
- [13] DESAI, C.S. and ABEL, J.F. (1972), "Introduction to the  
Finite Element Methods Van Nostrand Reinhold Company",  
New York.

- [14] MITZNER, R.M. (1967), "Numerical Solution for Transient Scattering from a Hard Surface of Arbitrary Shape - Retarded Potential Technique", J. Acoustical Society American, 42, 391-397.
- [15] SHAW, R.P. (1975), "Transient Scattering by a Circular Cylinder", J. Sound and Vibration, 42, 295-304.
- [16] MANSUR, W.J. and BREBBIA, C.A. (1982), "Formulation of the Boundary Element Methods for Transient Problems Governed by Scalar Wave Equation", App. Math. Modelling, 6, 307-311.
- [17] MANSUR, W.J. and BREBBIA, C.A. (1982), "Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems", App. Math. Modelling, 6, 299-306.
- [18] HUGHES, T.J.R. and LIN, W.K. (1978), "Implicit-Explicit Finite Element on Transient Analysis", Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 371-378, June.
- [19] NEILSON, H.C. and WANG, Y.F. (1978), "Transient Scattering by Arbitrary Axisymmetric Surfaces", Journal Acoustical Soc. American 63 (6), June.
- [20] SHAW, R.P. (1975), "An Outer Boundary Integral Equation Applied to Transient Wave Scattering in an Inhomogeneous Medium", Journal of Applied Mechanics, 147-152, March.
- [21] LAU, C.S. (1985), "Numerical Simulation of Waves by Boundary Element Method", Boundary Element VII, Proceedings 7th International Conference, Italy, Springer Verlag.
- [22] GROENENBOOM, P.H. (1984), "Solution of the Retarded Potential Problem and Numerical Stability", Boundary Element VI, Proceedings of the 6th. International Conference on board the Liner, the Queen Elizabeth, Southampton to New York, July, Springer-Verlag.
- [23] SEYBERT, A.F., SOENARKO, B, RIZZO, F.J. and SHIPPY, D.J. (1984), "Application of the B.I.E. Method to Sound Radiation Problems Using an Isoparametric Element", Transaction of the Asme, Vol. 106. July.

- [24] JAWSON, M.A. and SYMM, G.T. (1977), "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", Academic Press, London, New York, San Francisco.
- [25] STONE, J.M. (1963), "Radiation and Optics. An Introduction to the Classical Theory", Mac Graw Hill, New York, San Francisco, Toronto, London.
- [26] CHUANG, P.H. (1981), "Application of Boundary Elements Methods in Elastodynamics", M.Sc. dissertation, University of Southampton.
- [27] FRIEDMAN, M.B. and SHAW, R. (1962), "Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section", Transactions of the Asme, 40-46, March.
- [28] SHAW, R.P. and ENGLISH, J.A. (1972), "Transient Acoustic Scattering by a Free (pressure release) Sphere", Journal of Sound and Vibration, 20 (3), 321-331.
- [29] SHAW, R.P. (1968), "Retarded Potential Approach to the Scattering of Elastic Pulses by Rigid Obstacles of Arbitrary Shape", J.A.S.A., 44, 745-748.
- [30] STRATTON, J.A. (1941), "Electromagnetic Theory", Mc Graw-Hill Co.
- [31] LAMB, M. (1932), "Hydrodynamics", Dover, New York.
- [32] GRONENBOOM, P.H.L. (1981), "The Application of Boundary Elements to Steady and Unsteady Potential Flow Problems in Two and Three-Dimensional Problems", Boundary Elements Methods (Ed. C.A. BREBBIA), Springer Verlag, Berlin.
- [33] BANERJEE, P.K. and BUTTERFIELD, R. (eds.) (1979), "Developments in Boundary Elements Methods", Vol. 1, Applied Science Publishers, London.
- [34] HILDEBRAND, F.B. (1956), "Introduction to Numerical Analysis", Mc Graw Hill, New York.
- [35] SÁ, PEDRO, A.C. (1980), "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo", Tesis M.Sc. COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Setembro.

- [36] GROENENBOOM, P.H. (1982), "Wave Propagation Phenomena", Progress in Boundary Elements, Vol. 2, Pentech Press, London, Springer-Verlag, New York.
- [37] MATSUI, T., KATO, K. and SHIRAI, T. (1985), "A Hybrid Boundary Element Method for Ocean Wave Diffraction and Radiation Problems", Boundary Elements VII, Proceedings of the 7th Int. Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Set.
- [38] BERANEK, L. (1971), "Wave Motion", Encyclopedia of Sciencis and Technology Volume 14, Mac Graw Hill.
- [39] SQUIRE, C.F. (1971), "Waves in Physical Systems", Prentice Hall, Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey.
- [40] MORIYA, KAZUMA (1984), "A New Infinite Element for Finite Element Analysis of Three Dimensional Unbounded Field Problems", Bulletin of JSME, Vol. 27, No. 233, Nov.

## ANEXO A

LISTAGEM DA ROTINA INSTEP EM LINGUAGEM FORTRAN



```

SUBROUTINE INSTEP(XF,YF,ZF,X1,X2,X3, RMAX,H,G,U,P,SS,NAX,
*J,K,M,NX,HM,GM,NCL)
COMMON/NR1/N,L,NI,NL,C,DT,NN,TMAX,DMAX,NTYP,RM,T,XS,YS,ZS
*,NTIM,NPIN
COMMON/NR2/N1(54,54),N2(54,54),FI(54,80),UO(54),VO(54)
*,SFD(80),NDN(54,5),PD(54)
DIMENSION X1(1),X2(1),X3(1),U(NX,80),P(NX,80),HM(7,NX,NX)
*,GM(5,NX,NX)
DIMENSION XG(8),WG(8),HH(64,5),GG(64,3),XX(3,4),R(2,4)
*,XL(3),AH(7),AG(5),FNC(4),XP(3)

```

```

SUBROTINA GAUSS FORNECE PESOS E COORDENADAS DOS PONTOS
DE INTEGRACAO POR QUADRATURA GAUSSIANA

```

```

CALL GAUSS(WG,XG,NPIN)

```

```

COORDENADAS DO NO FONTE (CENTROIDE) DO ELEMENTO J

```

```

XP(1)=XF
XP(2)=YF
XP(3)=ZF

```

```

NMIN=1000000
NMAX=0
SS=0.
H=0.
G=0.
NPI=NPIN*NPIN
CDT=C*DT
DO 2 I1=1,NPI
DO 2 I2=1,5
2 HH(I1,I2)=0.
DO 5 I1=1,NPI

```

```
DO 5 I2=1,3  
5 GG(I1,I2)=0.
```

```
C  
C COORDENADAS DOS QUATRO NOS EXTREMIDADES DE ELEMENTO K  
C
```

```
DO 30 I=1,4  
XX(1,I)=X1(NDN(K,I+1))  
XY(2,I)=X2(NDN(K,I+1))  
30 XX(3,I)=X3(NDN(K,I+1))
```

```
C  
C  
DO 10 LX=1,NPIN  
R1=XG(LX)  
W1=WG(LX)  
DO 10 LY=1,NPIN  
R2=XG(LY)  
W2=WG(LY)  
RP=1.0-R1  
SP=1.0-R2  
RQ=1.0+R1  
SQ=1.0+R2
```

```
C  
C FUNCOES DE INTERPOLACAO (REFERENCIA 7)  
C
```

```
FN(1)=0.25*RP*SP  
FN(2)=0.25*RQ*SP  
FN(3)=0.25*RQ*SQ  
FN(4)=0.25*RP*SQ
```

```
C  
C  
DO 15 I=1,3  
15 XL(I)=0.
```

```
C  
C CALCULO DE LAS COORDENADAS DO PONTO DE INTEGRACAO L  
C DO ELEMENTO K  
C
```

```

DO 20 I=1,4
XL(1)=XL(1)+FN(I)*XX(1,I)
XL(2)=XL(2)+FN(I)*XX(2,I)
20 XL(3)=XL(3)+FN(I)*XX(3,I)
RJKL=0.

```

```

C
C   CALCULO DA DISTANCIA DO ELEMENTO J (CENTROIDE)
C   AC PONTO DE INTEGRACAO L
C

```

```

DO 25 I=1,3
25 RJKL=RJKL+(XP(I)-XL(I))**2
RJKL=SQRT(RJKL)

```

```

C
C
C   IF(RM.LT.RJKL) RM=RJKL

```

```

C
C   CALCULO DE NLR (PARTE INTEIRA DE RJKL/C*DT) E GL
C   (PARTE FRACCIUNRARIA DE RJKL/C*DT - NLR)
C

```

```

NLR=RJKL/CDT
GL=RJKL/CDT-NLR

```

```

C
C
C   CONDICAO DE CAUSALIDADE (RMAX=DISTANCIA PERCORRIDA
C   PELA ONDA ATE O TEMPO ATUAL T=M*DT)
C

```

```

IF(RJKL.GT.RMAX) GO TO 10

```

```

C
C
C   MN=M-NLR
C   RMC=RMAX-CDT
C   IF(RJKL.LT.RMC .AND. MN.GT.3) GO TO 10

```

```

C
C   DETERMINACAO DOS VALORES DE N(MIN) E N(MAX) RELATIVOS
C   ENTRE O NO J E O ELEMENTO K
C

```

```

IF(NMIN.GT.NLR) NMIN=NLR
IF(NMAX.LT.NLR) NMAX=NLR

```

C  
C

```

R(1,1)=-0.25*SP
R(1,2)=-R(1,1)
R(1,3)=0.25*SQ
R(1,4)=-R(1,3)
R(2,1)=-0.25*RP
R(2,2)=-0.25*RQ
R(2,3)=-R(2,2)
R(2,4)=-R(2,1)
LL=NPIN*(LX-1)+LY
RX=(XL(1)-XP(1))
RY=(XL(2)-XP(2))
RZ=(XL(3)-XP(3))
D11=0.
D12=0.
D21=0.
D22=0.
D31=0.
D32=0.
DO 35 I=1,4
D11=D11+XX(1,I)*R(1,I)
D12=D12+XX(1,I)*R(2,I)
D21=D21+XX(2,I)*R(1,I)
D22=D22+XX(2,I)*R(2,I)
D31=D31+XX(3,I)*R(1,I)
35 D32=D32+XX(3,I)*R(2,I)
G1=D21*D32-D22*D31
G2=D12*D31-D11*D32
G3=D11*D22-D12*D21
DG=G1**2+G2**2+G3**2

```

C  
C  
C

```

DG E' 0 JACOBIANO

```

DG=SQRT(DG)

IF(J.EQ.K.AND.NCL.EQ.0) GO TO 80

COSENOS DIRECTORES DA NORMAL 'A SUPERFICIE

CNX=G1/DG

CNY=G2/DG

CNZ=G3/DG

RPN=CNX\*RX+CNY\*RY+CNZ\*RZ

FAC=RPN\*DG\*W1\*W2/(RJKL\*\*2)

COEFICIENTES H1,H2,H3,H4 POR CADA PONTO  
DE INTEGRACAO

HH(LL,5)=NLR

HH(LL,1)=FAC\*((1.5-1.5\*GL)/CDT+(1.-GL)/RJKL)

HH(LL,2)=FAC\*((3.5\*GL-2.)/CDT+GL/RJKL)

HH(LL,3)=FAC\*(0.5-2.5\*GL)/CDT

HH(LL,4)=FAC\*0.5\*GL/CDT

IF(MN.GT.3) GO TO 80

COEFICIENTES H1,H2,H3,H4 PARA O PRIMEIRO INTERVALO  
DE TEMPO RETARDADO

A1=FAC\*((1.-GL)/RJKL+2.\*(1.-GL)/CDT)

A2=FAC\*(2.\*(GL-1.)/CDT+GL/RJKL)

A3=0.

A4=0.

A5=FAC\*(V0(K)\*(2.\*GL-1.))/C

C  
C  
C COEFICIENTES H1,H2,H3,H4 PARA O SEGUNDO INTERVALO  
C DE TEMPO RETARDADO

B1=FAC\*((1.-GL)/RJKL+1.5\*(1.-GL)/CDT)  
B2=FAC\*(GL/RJKL+(4.\*GL-2.)/CDT)  
B3=FAC\*(0.5\*(1.-5.\*GL)/CDT)  
B4=0.  
B5=-FAC\*GL\*VU(K)/C

C  
C

IF(MN.EQ.1) GO TO 65  
IF(MN.EQ.2) GO TO 70  
IF(MN.EQ.3) GO TO 75  
GO TO 80  
65 HH(LL,1)=A1  
HH(LL,2)=A2  
HH(LL,3)=A3  
HH(LL,4)=A4  
SS=SS+A5  
GO TO 80  
70 HH(LL,1)=B1-A1  
HH(LL,2)=B2-A2  
HH(LL,3)=B3-A3  
HH(LL,4)=B4-A4  
SS=SS+B5  
GO TO 80  
75 HH(LL,1)=HH(LL,1)-B1  
HH(LL,2)=HH(LL,2)-B2  
HH(LL,3)=HH(LL,3)-B3  
HH(LL,4)=HH(LL,4)-B4  
80 CONTINUE

C  
C CALCULO DOS COEFICIENTES G1 E G2  
C

```

      IF(RJKL.LT.RMC) GO TO 10
      GG(LL,3)=NLR
      IF(NTYP.GE.2) GO TO 2100
      IF(J.EQ.K.AND.NCL.EQ.0) GO TO 10
2100  CONTINUE
      FAC=W1*W2*DG/RJKL
      GG(LL,1)=(1.-GL)*FAC
      GG(LL,2)=GL*FAC

C
C
      10  CONTINUE
          IF(NMIN.EQ.1000000) GO TO 155

C
C      DETERMINACAO DOS VALORES DE N(MIN) E N(MAX) GERAIS
C      OU ABSOLUTOS PARA O NO J E O ELEMENTO K
C
      IF(N1(J,K).GT.NMIN) N1(J,K)=NMIN
      IF(N2(J,K).LT.NMAX) N2(J,K)=NMAX

C
C
      MIN=N1(J,K)
      MAX=N2(J,K)
      IMAX=MAX-MIN+4
      DO 85 I=1,7
85  AH(I)=0.

C
C      ACUMULACAO DE COEFICIENTES H1,H2,H3,H4 EM RELACAO A N
C
      DO 90 LP=1,NPI
      NR=HH(LP,5)
      IF(NR.EQ.0.AND.MIN.GT.0) GO TO 90
      DO 86 IN=1,4

86  AH(NR-MIN+IN)=AH(NR-MIN+IN)+HH(LP,IN)
90  CONTINUE

```

```

C
DO 95 I=1,5
95 AG(I)=0.

C
C   ACUMULACAO DE COEFICIENTES G1 E G2 EM RELACAO A N
C
DO 100 LP=1,NPI
NR=GG(LP,3)
IF(NR.EQ.0.0.AND.MIN.GT.0) GO TO 100
DO 96 IN=1,2
96 AG(NR-MIN+IN)=AG(NR-MIN+IN)+GG(LP,IN)
100 CONTINUE

C
C
C   DETERMINACAO DAS MATRIZES HM E GM
C
DO 105 I=1,IMAX
105 HM(I,J,K)=HM(I,J,K)+AH(I)
IMA=IMAX-2
DO 110 I=1,IMA
110 GM(I,J,K)=GM(I,J,K)+AG(I)

C
C
IF(NCL.GT.0) GO TO 155
IF(NTYP.GE.2) GO TO 155
IF(M.GT.1) GO TO 155
IF(J.NE.K) GO TO 155

C
C   CALCULO ANALITICO DE G1 E G2 E INTRODUCAO DIRETA
C   NA MATRIZ GM
C
CALL INLO(CDT,XP,XX,C1,C2,NTYP)
GM(1,J,K)=C1
GM(2,J,K)=C2
C

```



```

C
155 CONTINUE
    MIN=N1(J,K)
    IF(MIN.EQ.1000000) GO TO 165
    MAX=N2(J,K)
    IMAX=MAX-MIN+4
    IMA=IMAX-2

C
C   DETERMINACAO DOS COEFICIENTES DAS MATRIZES H E G DAS
C   INCOGNITAS (U,P) E DAS CONTRIBUICOES DOS FLUXOS E
C   POTENCIAIS RETARDADOS
C
    NPA=1
    IF(MIN.NE.C) GO TO 125
    H=hM(1,J,K)
    G=gM(1,J,K)
    NPA=2
125 DO 115 I=NPA,IMAX
    LNA=MIN+I-1
    NDIF=M-LNA
    IF(NDIF.LT.0) GO TO 115
    IF(NDIF.EQ.0) GO TO 112
    SS=SS+HM(I,J,K)*U(K,NDIF)
    GO TO 115
112 SS=SS+HM(I,J,K)*UO(K)
115 CONTINUE
    DO 120 I=NPA,IMA
    LNA=I+MIN-1
    NDIF=M-LNA
    IF(NDIF.LT.0) GO TO 120
    IF(NDIF.EQ.0) GO TO 118
    SS=SS+GM(I,J,K)*P(K,NDIF)
    GO TO 120
118 SS=SS+GM(I,J,K)*PO(K)
120 CONTINUE

```

C

C

165 CONTINUE  
145 RETURN  
END

## ANEXO B

## FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO NÚMERICA, INÍCIO DA MARCHA NO TEMPO

A fórmula (4.3.1) de diferenças atrasadas com três pontos pode ser obtida com um polinômio de segundo grau (Figura B-1), definido como:

$$u(t) = At^2 + Bt + C \quad (B-1)$$

Os coeficientes A, B e C podem ser deduzidos impondo as condições seguintes:

$$\begin{aligned} u &= u_0 & \text{em} & & t &= t_0 \\ u &= u_1 & & & t &= t_0 + \Delta t \\ u &= u_2 & & & t &= t_0 + 2\Delta t \end{aligned} \quad (B-2)$$

Assim obtêm-se:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta t^2} \left\{ \frac{1}{2} u_0 - u_1 + \frac{1}{2} u_2 \right\} \\ B &= \frac{1}{2\Delta t} \left\{ -3u_0 + 4u_1 - u_2 \right\} \\ C &= u_0 \end{aligned} \quad (B-3)$$

Conhecidos os coeficientes do polinômio (B-1), podemos obter  $\dot{u}$  para o último intervalo de tempo ou  $t = t_0 + 2\Delta t$ , a equação (B-4) é a equação de diferenciação de Newton com três pontos atrasados.

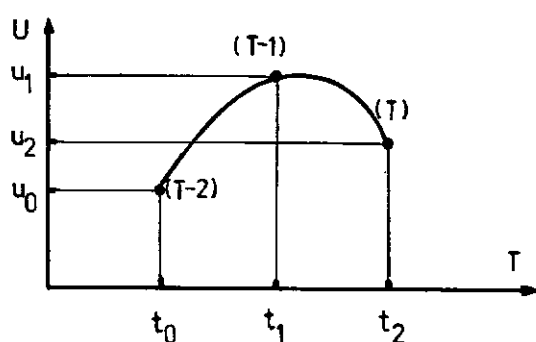


Figura B-1 - Aproximação Quadrática de  $u$  em  $2\Delta t$

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{3}{2} u_2 - 2u_1 + \frac{1}{2} u_0 \right\} \quad (B-4)$$

Em  $t = t_0 + \Delta t$ , tem-se

$$\dot{u} = \frac{1}{2\Delta t} (u_2 - u_0) \quad (B-5)$$

Se o índice nodal  $\bar{e}$  usado como índice superior po demos escrever (B-4) como,

$$\dot{u}^{(T)} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{3}{2} u^{(T)} - 2u^{(T-1)} + \frac{1}{2} u^{(T-2)} \right\} \quad (B-6)$$

e (B-5) fica:

$$\dot{u}^{(T-1)} = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ u^T - u^{(T-2)} \right\} \quad (B-7)$$

Quando iniciamos a marcha no tempo, e adotando  $t_0 = -\Delta t$  podemos calcular  $u^{(T-2)}$  da expressão (B-7)

$$u^{(T-2)} = -2\Delta t \dot{u}^{(T-1)} + u^T$$

onde  $u^{(T-2)}$ ,  $u^{(T-1)}$  e  $u^T$  correspondem respectivamente aos

valores de  $u$  em  $t = -\Delta t$ ,  $0$  e  $+\Delta t$  respectivamente (Figura B-2)

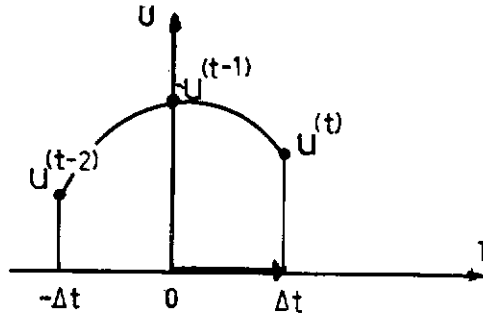


Figura B-2 - Início da Marcha no Tempo

Como  $\dot{u}^{(T-1)} = v_0$  e  $u^{(T-1)} = u_0$ , são condições iniciais, temos:

$$u^{(T-2)} = u^{(T)} - 2\Delta t v_0$$

Obtendo assim um terceiro ponto para aplicar a fórmula (B-6) a qual portanto fica:

$$\dot{u}^{(T)} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ 2u^{(T)} - 2u_0 - v_0 \Delta t \right\} \quad (B-8)$$

## ANEXO C

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DE  $G_1$  E  $G_2$ 

Apresenta-se no Anexo C a integração analítica das expressões (C-1), em certos casos especiais para os coeficientes de  $p$  quando o nó fonte e o nó campo coincidem e quando se está no primeiro intervalo de tempo ( $m = 1$ )

$$G_{1,jj}^{(i)} = \int_{\Gamma_k} \frac{(1 - \mu)}{R} d\Gamma \quad (C-1)$$

$$G_{2,jj}^{(i+1)} = \int_{\Gamma_k} \frac{\mu}{R} d\Gamma$$

onde  $\mu = R/C \Delta t - n$

Para o primeiro intervalo de tempo ( $m = 1$ ) no próprio elemento tem-se  $n = 0$ , portanto

$$\mu = R/C \Delta t$$

i) Caso quando o domínio dado pela área da circunferência de raio  $C \Delta t$  fica confinada dentro do elemento.

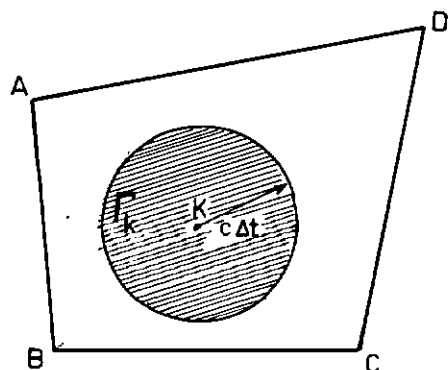


Figura C-1 - Domínio  $\Gamma_k$  para as Integrais

Temos: 
$$G_{1jj}^{(0)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{(1 - \mu)}{R} R d\theta dR = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{(1 - R/C\Delta t)}{R} R d\theta dR$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} d\theta dR - \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{R}{C\Delta t} d\theta dR = 2\pi C\Delta t - \pi C\Delta t = \pi C\Delta t$$

$$G_{2jj}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{\mu}{R} R d\theta dR = \int_0^{2\pi} \int_0^{C\Delta t} \frac{R}{C\Delta t} d\theta dR = \pi C\Delta t$$

Portanto:

$$G_{1jj}^{(0)} = \pi C\Delta t$$

(C-2)

$$G_{2jj}^{(1)} = \pi C\Delta t$$

Quando adotamos a formulação constante para aproximar  $p$  no tempo, os coeficientes podem ser derivados fazendo  $\mu = 0$  em (1), assim obtemos:

$$G_{1jj}^{(0)} = 2\pi C\Delta t$$

(C-3)

$$G_{2jj}^{(1)} = 0$$

ii) Caso quando a área do elemento fica confinado dentro da área da circunferência de raio  $C \Delta t$

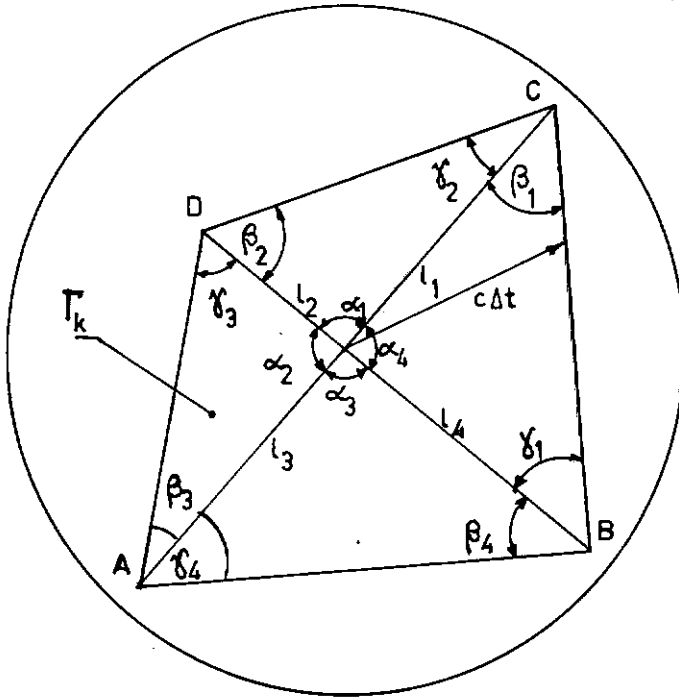


Figura C-2 - Domínio  $\Gamma_k$  para as Integrais

Neste caso temos que:

$$G_{2,jj}^{(1)} = \int_{\Gamma_k} \frac{\mu}{R} dA = \int_{\Gamma_k} \frac{dA}{C\Delta t} = \frac{1}{C\Delta t} \int_{\Gamma_k} dA =$$

$$= \frac{\text{Área quadrilátero}}{C\Delta t} = \frac{Ak}{C\Delta t} \quad (C-4)$$

Sendo  $Ak$ , a área do elemento quadrilátero  $k$

Para  $G_{1,jj}^{(0)}$  tem-se:

$$G_{1,jj}^{(0)} = \int_{\Gamma_k} \frac{(1-\mu)}{R} dA = \int_{\Gamma_k} \frac{dA}{R} - \int_{\Gamma_k} \frac{\mu}{R} dA = \int_{\Gamma_k} \frac{dA}{R} - \frac{Ak}{C\Delta t}$$

A integral  $\int_{\Gamma_k} \frac{dA}{R}$  será calculada no domínio mostrado na Figura (C-3).



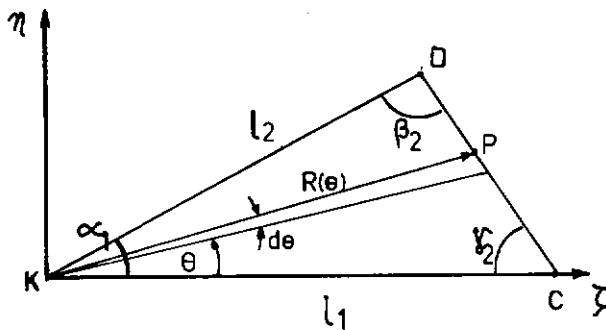


Figura C-3 - Domínio para Integração em Coordenadas Polares

Usando coordenadas polares temos:

$$\int_{A_k} \frac{dA}{R} = \int_{A_k} \frac{R d\theta dR}{R} = \int_{A_k} d\theta dR = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{R(\theta)} d\theta dR$$

#### Determinação de $R(\theta)$

Coordenadas do ponto C:  $(L_1, 0)$

Coordenadas do ponto D:  $(L_2 \cos \alpha_1, L_2 \sin \alpha_1)$

Reta CD:

Seja  $y = mx + n$  a reta CD, impondo as condições que os pontos C e D pertencem à reta obtêm-se:

$$m = \frac{L_2 \sin \alpha_1}{L_2 \cos \alpha_1 - L_1}$$

$$n = \frac{L_2 L_1 \sin \alpha_1}{L_2 \cos \alpha_1 - L_1}$$

Seja  $p = \frac{L_2 \sin \alpha_1}{L_2 \cos \alpha_1 - L_1}$ , então a reta CD pode-se escrever:

$$y = px - L_1 p \quad (C-5)$$

Reta KP

Se  $y = kx$  é a reta KP e  $k = \operatorname{tg} \theta$ , então:

$$y = \operatorname{tg} \theta x \quad (C-6)$$

Coordenada do ponto P:

Corresponde à interseção das retas CD e KP, en  
tão usando (C-5) e (C-6) tem-se:

$$\operatorname{tg} \theta x = px - \ell_1 p$$

Assim

$$x = - \frac{p \ell_1}{\operatorname{tg} \theta - p} \quad \text{e} \quad y = - \frac{\operatorname{tg} \theta p \ell_1}{\operatorname{tg} \theta - p}$$

serão as coordenadas do ponto P.

Logo  $R(\theta)$  é a distância entre o ponto K e o  
ponto P

$$R(\theta) = \sqrt{\frac{(-p \ell_1)^2}{(\operatorname{tg} \theta - p)^2} + \frac{(-p \ell_1 \operatorname{tg} \theta)^2}{(\operatorname{tg} \theta - p)^2}}$$

$$R(\theta) = \frac{p \ell_1}{\operatorname{tg} \theta - p} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

Voltando a nossa integral  $\int_0^{\alpha_1} \int_0^{R(\theta)} d\theta dR$ , temos:

$$\int_0^{\alpha_1} R(\theta) d\theta = \int_0^{\alpha_1} \frac{p \ell_1}{\operatorname{tg} \theta - p} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} d\theta = p \ell_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{tg} \theta - p} d\theta =$$

$$= p \ell_1 \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta - p \cos \theta} d\theta$$

onde integrando a função trigonométrica anterior, finalmente tem-se:

$$\int_{A_k} \frac{dA}{R} = \frac{p \ell_1}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ l_n \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1 - \operatorname{arctg} p}{2} \right) / \operatorname{tg} \left( -\frac{\operatorname{arctg} p}{2} \right) \right] \right\}$$

Se fazemos  $\alpha_1 = \gamma_2 + \beta_2$  somamos as quatro áreas  $A_k$  parciais e reordenamos, obtemos (37).

$$G_{1jk}^{(0)} = \sum_{i=1}^4 \ell_i \operatorname{sen} \beta_i l_n \left( 1 / (\operatorname{tg} \beta_i / 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma_i / 2) \right) - \frac{A_k}{C\Delta t} \quad (C-7)$$

$$e \quad G_{2jk}^{(1)} = \frac{A_k}{C\Delta t}$$

Se a formulação constante para aproximar  $p$  no tempo é usada, então fazendo  $\mu = 0$ , obtemos:

$$G_{1jk}^{(0)} = \sum_{i=1}^4 \ell_i \operatorname{sen} \beta_i l_n \left( 1 / (\operatorname{tg} \beta_i / 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma_i / 2) \right) \quad (C-8)$$

$$G_{2jk}^{(1)} = 0$$